Frattali

E. Paolini

16 aprile 2024

La parola "frattale" è stata introdotta da Mandelbrot per indicare insiemi "frastagliati" o "spezzettati". Non c'è una definizione precisa e universalmente riconosciuta di "frattale"; in modo informale si può dire che un frattale è un insieme che, se ingradito, rivela sempre maggiori dettagli.

Il frattale più famoso è sicuramente il "mandelbrot" (Figura 1). I frattali di questo tipo compaiono nello studio dei sistemi dinamici. Quasi sempre, parlando di frattali, si fa riferimento a questo settore della matematica (sistemi dinamici, caos, strani attrattori...). Noi invece vogliamo affrontare l'argomento sotto un diverso punto di vista: la teoria geometrica della misura. In questo ambito i frattali compaiono molto prima degli studi di Mandelbrot (1975). Il primo frattale è probabilmente dovuto a Cantor (1872), mentre la definizione di dimensione frattale (che vedremo nel seguito) è dovuta ad Hausdorff (1919).

Il problema dal quale Mandelbrot si è ispirato, e che forsi in molti si sono posti, è il seguente. Consideriamo, come esempio, la penisola italiana e chiediamoci quanto può essere l'area della sua superficie e la lunghezza totale delle sue coste.

Per quanto riguarda l'area si può pensare di prendere una carta geografica rappresentante tutta l'Italia, quadrettarla e contare i quadretti. Moltiplicando il numero dei quadretti occupati per l'area di ogni quadretto ottengo una certa approssimazione dell'area dell'Italia. Per ottenere un risultato più preciso posso pensare (idealmente) di prendere delle carte geografiche sempre più dettagliate. Oltre un certo limite le carte non mi saranno più utili e potrei addirittura misurare dal "vivo" la superficie dell'Italia. Per andare ancora oltre posso pensare di prendere degli ingrandimenti e misurare l'area sugli ingrandimenti. Confrontando i risultati ottenuti con queste misure successive dovrei notare che le aree stimate *tendono* ad approssimare con sempre maggior precisione un determinato valore. Tale valore *limite* può essere di buon grado scelto come misura *vera* dell'area dell'Italia.

Vediamo ora cosa succede se vogliamo applicare lo stesso procedimento per la lunghezza della costa. Come prima approssimazione prendo la carta dell'intera Italia, costruisco una poligonale che approssimi la costa e considero la lunghezza di tale poligonale. Poi prendo delle carte più dettagliate. Nelle carte dettagliate, quello che prima era approssimato con un segmento ora noto che non era perfettamente dritto ma che contiene molte insenature o promontori. Approssimando quindi me-

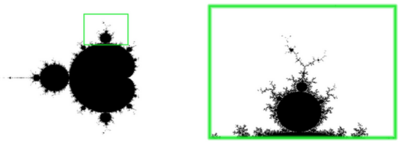


Figura 1: Sicuramente questo è il più famoso frattale: Mandelbrot. Ingrandendo una qualunque zona del frattale si scoprono nuovi dettagli. Inoltre la parte ingrandite è "simile" all'originale.

glio otterro una lunghezza maggiore di quella ottenuta precedentemente. Se vado ad ingrandire ancora la costa otterrò sempre maggiori dettagli che ad ogni passaggio mi fanno aumentare considerevolmente il risultato ottenuto in precedenza. Le misure che ottengo crescono ad ogni passaggio e grosso modo crescono sempre della stessa quantità. Quello che succede è che se volessi passare al limite il risultato che ottengo sarebbe *infinito*.

Dunque la costa dell'Italia può essere preso come primo esempio di frattale. Più in generale un *frattale* sarà un oggetto che man mano che viene ingrandito presenta sempre nuovi dettagli.

Il concetto di *frattale* è strettamente legato al concetto di *dimensione*, sarà quindi molto utile riflettere su *cos'è la dimensione*.

1 Le dimensioni intere

Cerchiamo di comprendere il concetto usuale di dimensione nel caso di oggetti concreti con dimensione intera. Per far questo riflettiamo sui seguenti problemi della vita quotidiana.

Problema 1 *Pierino costruisce una montagna di sabbia alta* 20 *centimetri e una alta* 30 *centimetri ma con la stessa forma. Se quella alta* 20 *centimetri pesa* 2 *chilogrammi, quanto pesa quella alta* 30 *centimetri?*

Risposta 1. Supponiamo, ad esempio, che la montagna di sabbia abbia la forma di una semisfera. Allora abbiamo due semisfere di raggio $r_1 = 20$ e $r_2 = 30$ centimetri. Il loro volume sarà $V = \frac{2}{3}\pi r^3$ e il loro peso sarà $P = \frac{2}{3}\pi r^3\sigma$ dove σ è la densità della sabbia. Notiamo ora che $\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{2}{3}\pi r_2^3\sigma}{\frac{2}{3}\pi r_1^3\sigma} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{2}{7}8$ e quindi $P_2 = \frac{27}{8}P_1$ cioè la seconda montagnetta pesa 6 chili e 750 grammi.

Supponiamo invece che le montagnette siano a forma di piramide. Mettiamo che la prima montagnetta sia una piramide a base quadrata con altezza $h_1 = 20$ centimetri e lato della base $l_1 = 40$ centimetri. La piramide di altezza $h_2 = 30$ centimetri avrà dunque una base di lato $l_2 = 60$ centimetri. L'area della base sarà dunque $S = l^2$ e il volume sarà dato da $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}l^2h$. Il rapporto tra i pesi delle due piramidi sarà stavolta $\frac{P_2}{P_1} = \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 \frac{h_2}{h_1}$ notando però che $l = 2h$ si ottiene ancora $\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3 = \frac{27}{8}$.

E se Pierino facesse montagnette a forma di monolito i cui lati sono proporzionali a $1, 4, 9$? La prima montagnetta avrebbe altezza $h_1 = 20$ centimetri, larghezza $l_1 = \frac{4}{9}20$ centimetri e spessore $d_1 = \frac{1}{9}20$ centimetri. La seconda avrebbe dimensioni $h_2 = \frac{3}{2}h_1$, $l_2 = \frac{2}{3}l_1$ e $d_2 = \frac{2}{3}d_1$. I rispettivi volumi sarebbero dunque $V = h_1l_1d_1$ e quindi $\frac{P_2}{P_1} = \frac{h_2}{h_1}\frac{l_2}{l_1}\frac{d_2}{d_1} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{27}{8}$.

Se funziona pure col monolito viene il sospetto che funzioni con qualunque forma.

Risposta 2. È ben noto che se riscalo un oggetto di un fattore lineare λ il suo volume e quindi il suo peso si riscala di un fattore λ^3. Nel nostro caso $\lambda = \frac{3}{2}$ e quindi $P_2 = \lambda^3 P_1 = \frac{27}{8} \cdot 2 = 6,75$ chilogrammi.

Ecco, dobbiamo convincerci che quest'ultima risposta è corretta. Più sinteticamente potremmo dire che peso e volume sono *misure* tridimensionali. Se ingrandiamo un oggetto di un fattore λ il volume dell'oggetto cambia di un fattore λ^3.

Vediamo un altro esempio.

Problema 2 *Pierino ha fatto un bel disegno su un foglio del suo quadernetto. Ora lo vuole ingrandire con la fotocopiatrice. Pierino nota che in un foglio della fotocopiatrice (formato A4) stanno esattamente due fogli del suo quadernetto (A5) e nota* *pure che i fogli A4 e A5 sono simili (hanno la stessa forma). Qual è il rapporto di ingrandimento che deve impostare sulla fotocopiatrice per ottenere l'ingrandimento da A5 ad A4?*

Risposta 1. Mettiamo che il foglio $A5$ abbia dimensioni x_1, y_1 e il foglio $A4$ abbia dimensioni x_2, y_2. Allora i dati ci dicono che $y_2 = 2x_1$ $x_2 = y_1$ e anche $\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1}{y_1}$. Dunque si ottiene $\frac{y_1}{2x_1} = \frac{x_1}{y_1}$ cioè $y_1^2 = 2x_1^2$ quindi $y_1 = \sqrt{2}x_1$. Da cui anche $y_2 = \sqrt{2}y_1$. Dunque l'ingrandimento da impostare è dato da $\frac{x_2}{x_1} = \sqrt{2}$ ovvero circa 141% (si noti che su tutte le fotocopiatrici l'ingrandimento 141% e il suo inverso $1/\sqrt{2} = 71\%$ possono essere scelti con dei tasto appositi spesso contrassegnati con $A_4 \to A_3$ e $A_3 \to A_4$).

Risposta 2. L'ingrandimento che ci serve ha la proprietà di raddoppiare le aree in quanto un foglio diventa due fogli. Se l'ingrandimento lineare è λ il rapporto tra le aree è λ^2. Quindi da $\lambda^2 = 2$ otteniamo $\lambda = \sqrt{2} = 141\%$.

Anche in questo caso l'ultima risposta ci fa risparmiare molto fosforo. Notiamo inoltre che non solo l'area del foglio raddoppia nell'ingrandimento 141% ma anche l'area del disegno di Pierino raddoppia, qualunque sia la forma del disegno. L'area è infatti una misura bidimensionale, se le dimensioni cambiano di un fattore λ l'area cambia di un fattore λ^2.

Problema 3 *La pista di Monza è lunga* 10 *chilometri. Mi sono fatto una pista per le macchinine della stessa forma di quella originale, ma in scala* 1 : 10000. *Quanto è lunga la pista delle macchinine?*

Risposta 1. Supponiamo che $\gamma_1 \colon [0,1] \to \mathbf{R}^2$ sia la curva che identifica la forma della pista di Monza. La curva che rappresenta la pista in scala sarà dunque $\gamma_2 = \frac{\gamma_1}{10000}$. La lunghezza di una curva è data da $l = \int_0^1 |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$. Dunque abbiamo $l_1 = \int_0^1 |\gamma_1'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 |(10000\gamma_2)'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 |10000\gamma_2'(t)|\,\mathrm{d}t = 10000\int_0^1 |\gamma_2'(t)|\,\mathrm{d}t = 10000 l_2$ da cui $l_2 = 1$ metro.

Risposta 2. Essendo misure lineari, la risposta è $10km/10000 = 1m$.

Anche in questo caso è dunque sufficiente notare che le lunghezze sono misure unidimensionali, cioè se una figura si riscala di un fattore λ tutte le lunghezze si riscalano dello stesso fattore λ.

Vorrei far notare come il terzo esercizio sia in un certo senso impostato diversamente dai primi due. Nei primi due esercizi, infatti, abbiamo rispettivamente un oggetto tridimensionale (il mucchio) in uno spazio tridimensionale (*lo* Spazio) e un oggetto bidimensionale (il disegno) in uno spazio bidimensionale (il foglio). Nel terzo esercizio, invece, abbiamo un oggetto unidimensionale (la pista) in uno spazio bidimensionale (la superficie terrestre). Quindi può essere interessante mostrare un esercizio su un oggetto bidimensionale in uno spazio tridimensionale.

Problema 4 *Pierino sta dipingendo la carrozzeria della sua Porsche BBurago scala* 1 : 100. *Per completare il lavoro gli è servito un tubetto intero di tempera blu e un quarto di tubetto di tempera rossa. Quanti tubetti di tempera gli sarebbero necessari per dipingere una Porsche vera?*

A questo punto non scrivo neanche le soluzioni che dovrebbero essere già chiare (il risultato corretto è 10000 tubetti di tempera blu e 2500 tubetti di tempera rossa).

Vediamo invece un altro esercizio che pur essendo per certi versi banale a me sembra addirittura illuminante.

Problema 5 *Pierino fa una foto di gruppo ai suoi* 24 *compagni di classe. La foto, una volta stampata, risulta essere in scala* 1 : 12. *Quanti sono i compagni di classe nella foto?*

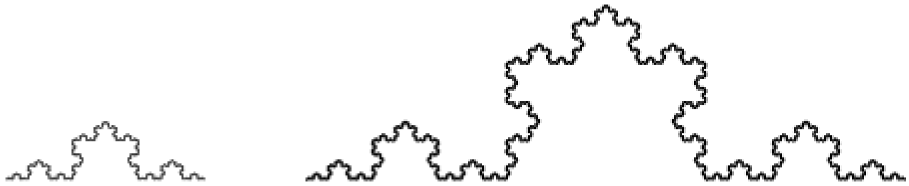
Risposta Il numero di componenti di un oggetto non cambia se riscalo l'oggetto.

Quello che deduciamo, in questo caso, è che il *numero di elementi* è una misura 0-dimensionale. Infatti se io ingrandisco di un fattore λ le dimensioni di un oggetto, il numero di elementi cambia di un fattore $\lambda^0 = 1$ cioè, in pratica, non cambia.

2 dimensioni non intere

Per quanto riguarda i frattali potrà succedere che facendo un riscalamento di un fattore λ la misura del frattale cambierà di un fattore λ^d dove d è un numero eventualmente non intero. Tale numero d viene chiamato *dimensione* del frattale.

Vediamo subito un esempio. Consideriamo l'insieme di Köch "fiocco di neve". Nella figura seguente si nota che il fioccone a destra è l'ingrandimento di un fattore $\lambda = 3$ del fiocco di sinistra.



D'altra parte il fiocco di destra è anche formato da quattro copie identiche del fiocchetto di sinistra. Questo significa che ingrandendo il fiocco di neve di un fattore $\lambda = 3$ la misura del fiocco aumenta di un fattore 4. Cioè, in analogia ai casi precedenti, ponendo $4 = 3^d$ si ottiene che la dimensione di questo insieme è $d = \log_3 4$.

3 La misura d-dimensionale

Chiamiamo ora $\mathcal{H}^d$ la misura d-dimensionale. In pratica $\mathcal{H}^3(X)$ sarà il volume dell'oggetto X, $\mathcal{H}^2(X)$ sarà l'area, $\mathcal{H}^1(X)$ la lunghezza e $\mathcal{H}^0(X)$ il numero di elementi. X per ora lo si può pensare come un sottoinsieme dello spazio euclideo tridimensionale $\mathbf{R}^3$.

Le proprietà che soddisfano queste misure sono

1. Se X e Y sono disgiunti $\mathcal{H}^d(X \cup Y) = \mathcal{H}^d(X) + \mathcal{H}^d(Y)$ (additività).

2. Se φ è una isometria (una trasformazione che conserva le distanze) allora $\mathcal{H}^d(\varphi(X)) = \mathcal{H}^d(X)$ (invarianza per isometrie).

3. Se $\lambda > 0$ si ha $\mathcal{H}^d(\lambda X) = \lambda^d \mathcal{H}^d(X)$ dove λX è l'insieme ottenuto riscalando X di un fattore λ (d-omogeneità).

Notiamo inoltre che le misure $\mathcal{H}^d$ possono anche assumere il valore $+\infty$. Anzi, dato un insieme X può esistere al più un valore d per cui $0 < \mathcal{H}^d(X) < \infty$. Questo numero d (se esiste) viene chiamato *dimensione (di Hausdorff) di* X e si indica con $\dim_{\mathcal{H}}(X)$.

Chiaramente la dimensione di una superficie è 2. Questo perchè l'area ($\mathcal{H}^2$) della superficie è finita[1]. La dimensione di una curva è invece 1 e la dimensione di

[1] In realtà la dimensione viene definita in maniera leggermente più generale in modo tale che anche la dimensione di una superficie di area infinita sia comunque 2. Ma per ora pensiamo ad una superficie (curva, solido) limitata

un solido è 3. Se prendiamo un insieme finito di punti abbiamo poi un oggetto di dimensione 0.

Nell'esempio della superficie dell'Italia, abbiamo trovato che tale superficie ha dimensione 2, mentre abbiamo notato che la lunghezza della costa è infinita e quindi la costa avrà dimensione maggiore di 1!

4 Insiemi autosimili

Gli insiemi autosimili sono degli insiemi di cui è particolarmente facile calcolare la dimensione.

Diciamo che un insieme X è autosimile se può essere diviso in un certo numero di pezzi $X_1, \ldots, X_n$ che sono copie omotetiche (identiche a meno di riscalamento) di X.

Ad esempio un quadrato Q può essere diviso in nove quadrati di lato un terzo. Oppure il "fiocco di neve" può essere diviso in quattro parti ognuna delle quali è rimpicciolita di un fattore tre.

Se il fattore di contrazione delle omotetie è sempre lo stesso (diciamo λ) allora si può calcolare la dimensione di X come abbiamo fatto per il "fiocco di neve":

$$\mathcal{H}^d(X) = n\mathcal{H}^d(X/\lambda) = n\lambda^d\mathcal{H}^d(X)$$

da cui si ricava

$$d = -\frac{\log n}{\log \lambda}.$$

Notiamo inoltre che un frattale autosimile è del tutto determinato dalle omotetie che definiscono la sua *autosimilitudine*. Cioè date delle contrazioni $T_1, \ldots, T_n$ esiste un solo insieme X (a parte insiemi banali) tale che

$$X = T_1(X) \cup \ldots \cup T_n(X).$$

Questo fatto non sarà sorprendente per chi conosce il *teorema delle contrazioni*. Si può infatti notare come l'insieme X dovrà essere il punto fisso di una trasformazione definita sullo spazio di tutti gli insiemi compatti. Il fatto che le T_k siano tutte contrazioni garantirà che anche tale trasformazione è una contrazione.

5 Definizione e calcolo di $\mathcal{H}^d$

Finora siamo riusciti a trarre delle conclusioni sulla dimensione degli oggetti supponendo l'esistenza di una misura d-dimensionale $\mathcal{H}^d$. Abbiamo richiesto che una tale misura abbia le seguenti proprietà: additività, invarianza per isometrie, d-omogeneità.

Queste caratteristiche però non individuano univocamente una misura. Ad esempio l'area di un insieme del piano ha queste proprietà, ma anche il doppio dell'area ha le stesse proprietà (come qualunque multiplo dell'area). Risulta però che fissata la misura di un insieme (ad esempio scegliendo per convenzione che la misura 2-dimensionale di un quadrato deve essere 1) allora c'è una sola misura 2-dimensionale (sul piano) che è proprio la usuale area.

Purtroppo per definire la misura $\mathcal{H}^d$ in uno spazio metrico qualunque (uno spazio metrico è un qualunque insieme su cui sia definita la distanza tra i punti) non si può far ricorso ai quadrati in quanto il concetto di quadrato non si riesce ad estendere in modo naturale. Quello che invece si utilizza è l'analogo del cerchio.

Innanzitutto, dunque, dobbiamo "scegliere" quale vogliamo che sia la misura del d-cerchio. L'idea è quella di prendere la formula per i d-cerchi quando d è intero e di estenderla poi a tutti i numeri reali.

(*** qui andrebbe messo il calcolo del volume della n-sfera ***)

Se d è intero la misura del d-cerchio unitario è

$$\omega_d = \frac{\pi^{d/2}}{(d/2)!}$$

dove il simbolo $n!$ è il fattoriale, definito dalla formula ricorsiva $n! = n(n-1)!$ con la convenzione $0! = 1$ e $(1/2)! = \pi/2$. Chiaramente la misura del d-cerchio di raggio r sarà dunque $\omega_d r^d$ che infatti per $d = 2, 3$ ci dà le seguenti formule

$$\pi r^2, \quad \frac{4}{3}\pi r^3$$

che sono proprio l'area del cerchio e il volume della sfera. Cos'è poi l'1-cerchio? Il cerchio di raggio r è l'insieme dei punti del piano che distano meno di r da un punto fissato. Analogamente fissato un punto x sulla retta l'1-cerchio di centro x e raggio r sarà il segmento $]x - r, x + r[$ la cui lunghezza è $2r$ come effettivamente risulta dalla formula $\omega_1 r$.

Per quanto riguarda lo 0-cerchio dobbiamo convincerci che lo spazio in cui ci dobbiamo mettere è lo spazio 0-dimensionale e cioè un singolo punto. La palla di raggio qualunque in uno spazio composto da un solo punto è il punto stesso e la sua 0-misura è il numero dei punti che lo compongono e cioè 1. Si ha infatti $\omega_0 r^0 = 1$.

Volendo estendere ω_d ai valori di d non interi, bisogna trovare una estensione del fattoriale ai valori non interi. L'estensione naturale fa ricorso alla funzione Γ definita in questo modo:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

Si può infatti dimostrare che se d è intero si ha $d! = \Gamma(d+1)$ e che questa Γ è l'unica funzione analitica con questa proprietà.

Dunque la definizione di ω_d per ogni reale $d \geq 0$ viene data così:

$$\omega_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 1)}.$$

Siamo ora pronti per capire come si costruisce $\mathcal{H}^d$. Mettiamo di avere un insieme X su cui è definita una distanza (ad esempio possiamo pensare che X sia un sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$ e la distanza sia la distanza di $\mathbf{R}^3$) e cerchiamo di calcolare $\mathcal{H}^d(X)$. L'idea è quella di dividere X in pezzi sempre più piccoli.

Supponiamo ad esempio che $X = X_1 \cup \ldots \cup X_N$ con gli X_i a due a due disgiunti allora si avrà

$$\mathcal{H}^d(X) = \sum_i \mathcal{H}^d(X_i).$$

Vogliamo ora stimare $\mathcal{H}^d(X_i)$ con il diametro di X_i: $\mathrm{diam} X_i$ che è per definizione la massima distanza tra due punti qualunque di X_i. È noto che tra tutti gli insiemi del piano con un certo diametro fissato quello di di area massima è il cerchio. Dunque per qualunque regione A del piano si ha $\mathcal{H}^2(A) \leq \pi(\mathrm{diam}(A)/2)^2$. Più in generale, in $\mathbf{R}^n$ l'insieme che risolve il problema "isodiametrico" è la n-palla, e si ha dunque $\mathcal{H}^n(A) \leq \omega_n(\mathrm{diam}(A)/2)^n$.

La definizione di $\mathcal{H}^d(X)$ viene dunque data prendendo tra tutte le suddivisioni di X quelle fatte con pezzi sempre più piccoli e sempre più "isodiametrici":

$$\mathcal{H}^d(X) = \inf_{r>0} \sup \left\{ \omega_d \sum_i (\mathrm{diam}(X_i)/2)^d \colon X_i \text{ partizione di } X,\ \mathrm{diam}(X_i) \leq r \right\}$$

in pratica $\mathcal{H}^d(X)$ viene approssimato da

$$\omega_d \sum_i (\mathrm{diam}(X_i)/2)^d$$

su una opportuna scelta di suddivisioni di X.

Nella seguente sezione proveremo ad applicare la definizione per trovare la misura della curva di Köch.

6 La misura della curva di Köch.

Consideriamo la curva di Köch X costruita su un segmento di lunghezza 1. Abbiamo già trovato che la dimensione della curva di Köch X è $d = \log_4 3$, cerchiamo ora di calcolare $\mathcal{H}^d(X)$. Sfruttiamo il fatto che X è un frattale autosimile, cioè che X è formato da quattro copie di sè stesso riscalate di un fattore $1/3$. In prima approssimazione possiamo suddividere X nelle quattro parti date dalla similitudine di X con sè stesso. Ognuna di queste parti ha diametro $1/3$ (basta notare che X stesso ha diametro 1 in quanto i punti più distanti sono proprio gli estremi del segmento di partenza). Come secondo passo possiamo dividere ognuna delle quattro parti in altre quattro parti ottenendo 4^2 pezzi ognuno di diametro $1/3^2$. All'n-esimo passo abbiamo diviso X in 4^n parti di diametro $1/3^n$. Supponendo che questa suddivisione sia “ottimale” si ottiene

$$\mathcal{H}^d(X) = \omega_d \sum_{i=1}^{4^n} ((1/3)^n/2)^d = \omega_d \frac{4^n}{3^{nd}2^d} = \omega_d \frac{(4/3^d)^n}{2^d} = \frac{\omega_d}{2^d}$$

(ricordandoci che $3^d = 4$).