

ANALISI MATEMATICA B

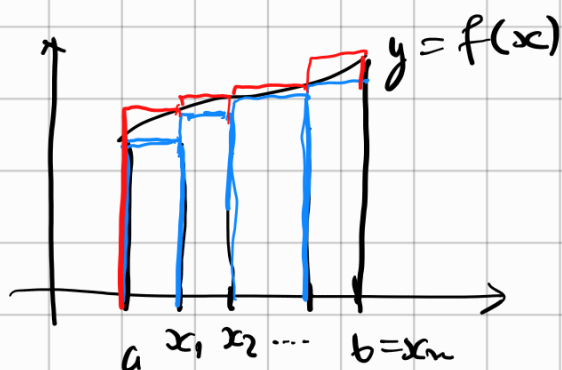
LEZIONE 44 - 21.1.2026

INTEGRALE di RIEMANN

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, limitata

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_N\} \subseteq [a, b]$$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$



$$S^*(f, P) = \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) \cdot \sup f([x_{k-1}, x_k])$$

$$S_*(f, P) = \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) \cdot \inf f([x_{k-1}, x_k])$$

$$I^*(f) = \inf \{ S^*(f, P) : P \text{ suddivisione di } [a, b] \}$$

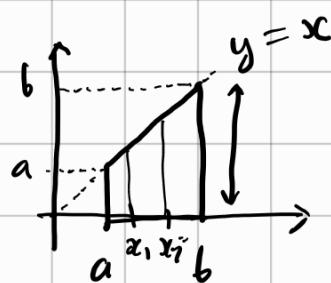
$$I_*(f) = \sup \{ S_*(f, P) : P \text{ suddivisione di } [a, b] \}$$

Se $I^*(f) = I_*(f)$ allora pongo $\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = I^*(f)$

$\uparrow$
 variabile
 reale

Esempio 1 $f(x) = x$

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$



Verifichiamo che f è integrabile e che vale:

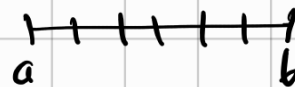
$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(a+b) \cdot (b-a) \quad \leftarrow \text{area del trapezio.}$$

$$P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

$$S^*(f, P) = \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) \cdot x_k$$

scegliamo P_N opportunamente:

(suddivisa in N parti uguali).



$$x_k = a + k \cdot \frac{(b-a)}{N}$$

$$S_N^*(f, P_N) = \sum_{k=1}^N \frac{b-a}{N} \cdot \left(a + \frac{(k-1)(b-a)}{N} \right)$$

$$S_N^*(f, P_N) = N \cdot \frac{b-a}{N} \cdot a + \frac{b-a}{N} \cdot \frac{b-a}{N} \sum_{k=1}^N (k-1)$$

$$= (b-a) \cdot a + \frac{(b-a)^2}{N} \cdot \frac{(1+N)}{2} \quad \text{--- } (0+N-1)$$

$$= (b-a)a + (b-a)^2 \left[\frac{1}{2N} + \frac{1}{2} \right]$$

$$= (b-a) \left(a + \frac{(b-a)}{2} \right) + \frac{1}{2N} (b-a)^2$$

$$= \frac{1}{2} (b-a) (a+b) + \frac{1}{2N} (b-a)^2$$

$N \rightarrow \infty$

$$S_N^*(f, N) \rightarrow \frac{1}{2} (b-a) (a+b) \quad \text{per } N \rightarrow \infty$$

$$\parallel$$

$$I^*(f)$$

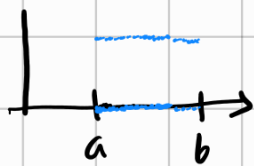
Esercizio

$$\int_0^b x^2 dx \stackrel{?}{=} \frac{1}{3} b^3$$

per casa.



Esempio negativo. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 $b > a$

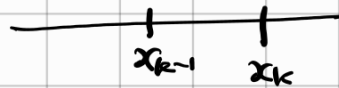


$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

$$\sup f([x_{k-1}, x_k]) = 1$$

$$\inf f([x_{k-1}, x_k]) = 0$$



$$S^*(f, P) = \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) \cdot 1$$

$$S^*(f, P) = \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) = x_N - x_0 = b - a$$

$$S_*(f, P) = 0$$

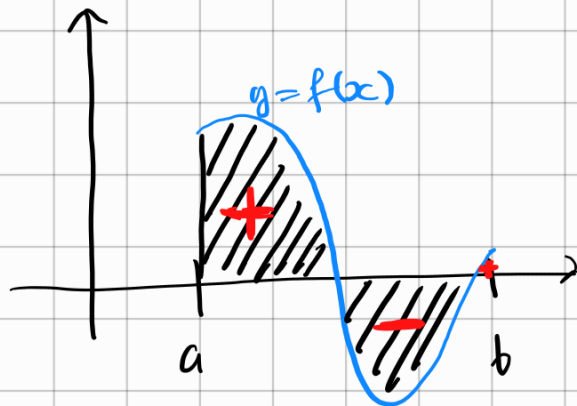
$$I^*(f) = b - a$$

$$I_*(f) = 0$$

$b > a \Rightarrow f$ non è R -integrabile.

Oss 1 se f cambia segno?

ottengo una area "con segno".

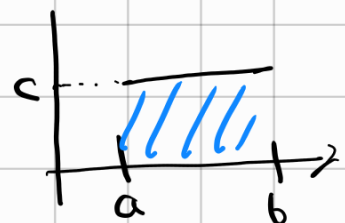


Notazione se $a > b$?

Per definizione $\int_a^b f = - \int_b^a f$

[Se $a = b$ $\int_a^b f = 0$]

Oss Se f è costante $f(x) = c$



$\int_a^b c = c(b-a)$ e si dimostra banalmente.

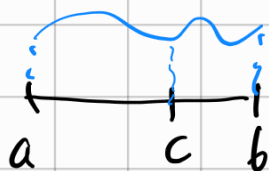
$S^*(f, P) = S_*(f, P) = \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) \cdot c = (b-a) \cdot c \quad \square$

Intuizione $\approx$ f integrabile

$$S^*(f, P) \sim S_*(f, P) \sim \sum_{k=1}^N f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \sim \sum_{x=a}^b f(x) \cdot \Delta x \sim \int_a^b f(x) dx$$

PROPRIETA' DEGLI INTEGRALI

Additivita'



$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata
 $c \in [a, b]$

⊛ f integrabile su $[a, b] \Leftrightarrow f$ è integrabile su $[a, c]$ e su $[c, b]$

e vale:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Grazie alla convenzione

$$\int_a^b = -\int_b^a$$

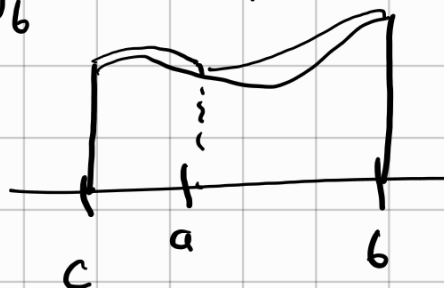
la formula

vale

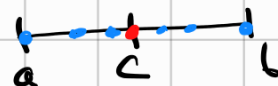
anche se $c \notin [a, b]$

$$\int_c^b f = \int_c^a f + \int_a^b f$$

$$\int_a^b f = -\int_c^a f + \int_c^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$



dim idea: P suddivisione di $[a, b]$



$P_1 = (P \cup \{c\}) \cap [a, c]$ è una suddivisione di $[a, c]$

$P_2 = (P \cup \{c\}) \cap [c, b]$ è una suddivisione di $[c, b]$

Viceversa $\hookrightarrow$ ha P_1 e P_2 avendo $P = P_1 \cup P_2$ è una suddivisione di $[a, c]$ e $[c, b]$ addizione di $[a, b]$.

$$S^*(f, P) \geq S^*(f, P \cup \{c\}) = S^*(f, P_1) + S^*(f, P_2)$$

$$S_*(f, P) \leq S_*(f, P \cup \{c\}) = S_*(f, P_1) + S_*(f, P_2)$$

$$S^*(f, P) - S_*(f, P) < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} S^*(f, P_1) - S_*(f, P_1) < \varepsilon \\ S^*(f, P_2) - S_*(f, P_2) < \varepsilon \end{cases}$$

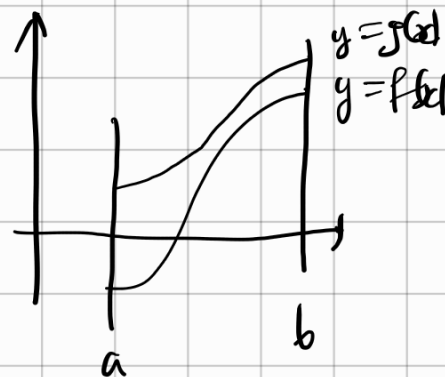
$$\Leftrightarrow S^*(f, P \cup \{c\}) - S_*(f, P \cup \{c\}) < 2\varepsilon$$

□

MONOTONIA Se f e g sono $\mathbb{R}$ -integrabili su $[a, b]$

e $f \leq g$ (cioè $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$)

allora
$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$



dim $f \leq g \Rightarrow S^*(f, P) \leq S^*(g, P)$

$$\Rightarrow I^*(f) \leq I^*(g)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

□

Oss
In particolare se $f \geq 0, a \leq b \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

LINEARITÀ

limitate

Se f e g sono $\forall$ $\mathbb{R}$ -inte. probili su $[a, b]$ allora anche $f+g$ è $\mathbb{R}$ -integrabile

e vale:

$$\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

anzi $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\lambda f + \mu g$ è $\mathbb{R}$ -integrabile e

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

OVVERO $\mathcal{R}(a, b) = \{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ limitata e } \mathbb{R}\text{-integrabile} \}$
 $\mathcal{R}(a, b)$ è uno spaz. vettoriale
e $I: \mathcal{R}(a, b) \rightarrow \mathbb{R}, I(f) = \int_a^b f$
è lineare.

dim Pono 1 $\lambda = -1, \mu = 0$: $\int_a^b (-f) \stackrel{?}{=} - \int_a^b f$

$$S^*(-f, p) = -S_*(f, p) \dots$$

Pono 2 $\lambda \geq 0$ e $\mu = 0$: $\int_a^b \lambda f \stackrel{?}{=} \lambda \int_a^b f$

$$S^*(\lambda f, p) = \lambda S^*(f, p) \quad (\lambda \geq 0)$$

Passo 3 $\lambda=1, \mu=1$

$$\int_a^b (f+g) \stackrel{?}{=} \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$S^*(f+g, P) \leq S^*(f, P) + S^*(g, P)$$

$$\sup_{x \in A} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{(x,y) \in A \times A} (f(x) + g(y)) = \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{y \in A} g(y)$$

analogamente:

$$S_*(f+g, P) \geq S_*(f, P) + S_*(g, P)$$

$$S^*(f+g, P) - S_*(f+g, P) \leq (S^*(f, P) - S_*(f, P)) + (S^*(g, P) - S_*(g, P))$$

f, g integrabili $\Rightarrow f+g$ integrabile

□