

ANALISI MATEMATICA B

LEZIONE 43 - 19.1.2026

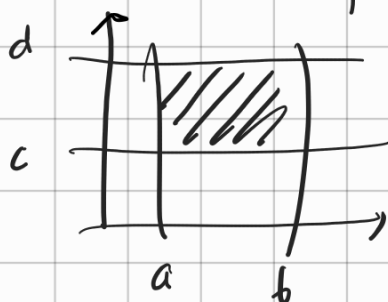
MISURA / COS'È L'AREA?

$$E \subseteq \mathbb{R}^2 \quad m(E) = \text{"area di } E" \in \mathbb{R}$$



Proprietà che vogliamo siano soddisfatte

- ① $m(E \cup F) = m(E) + m(F)$ se $E \cap F = \emptyset$ (additività)
- ② $m([0,1] \times [0,1]) = 1$ (unità)
- ③ $m(E + v) = m(E)$ (invarianza per traslazioni)
- ④ $m([a,b] \times [c,d]) = (b-a) \cdot (d-c)$



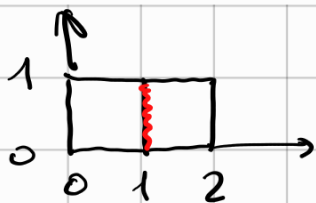
⑤ $E \subseteq F \Rightarrow m(E) \leq m(F)$ (monotonia)

Queste proprietà definiscono univocamente l'area
(MA) non di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$.

• ci sono insiemi non misurabili.

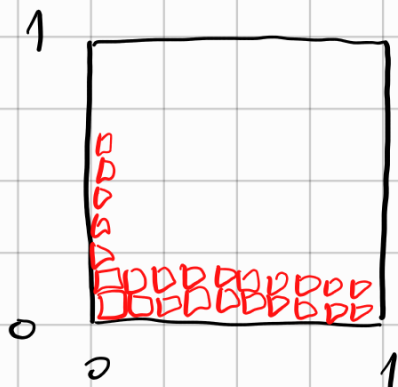
COSTRUZIONE di m .

Come nei ② $\wedge$ ③ $\Rightarrow$ ④



$$[0,2] \times [0,1] = \underbrace{[0,1] \times [0,1]}_{m=1} \cup \underbrace{[1,2] \times [0,1]}_{m=1}$$

② $\Rightarrow$ ③



$[0,1] \times [0,1] \supseteq$ unione disgiunta
di $(N+1)^2$ quadrati
di lato $\frac{1}{N+1}$

$\subseteq$ unione
di $(N+1)^2$ quadrati
di lato $\frac{1}{N+1}$

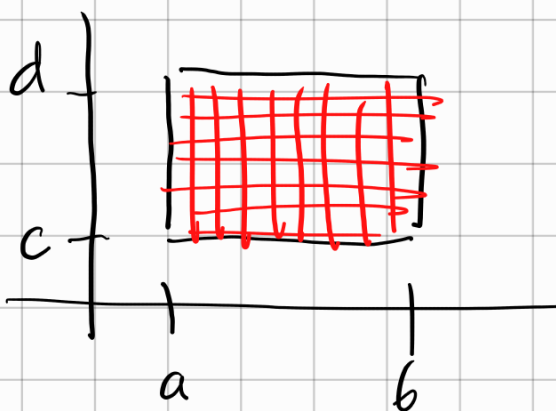
il quadrato di lato $\frac{1}{N+1}$

⑤ ha area compresa tra $\left(\frac{1}{N+1}\right)^2$ e $\left(\frac{1}{N-1}\right)^2$.

$\Rightarrow [0,2] \times [0,1]$ ha area molto vicina a 2



$N \rightarrow \infty$ ha area 2.

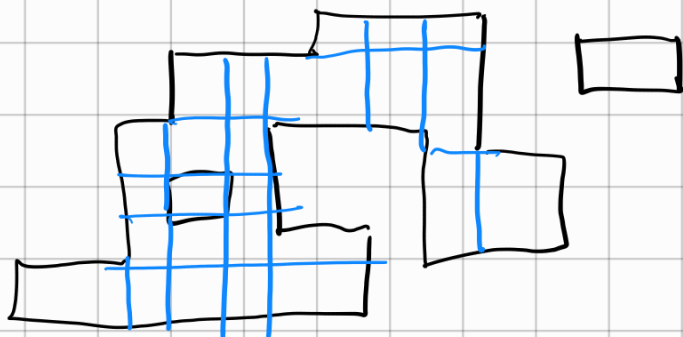


$\Downarrow$

I rettangoli di
altezza nulla
o base nulla
hanno area
nulla

Polirettangoli:

E è un polirettangolo cartesiano se è
unione di rettangoli cartesiani



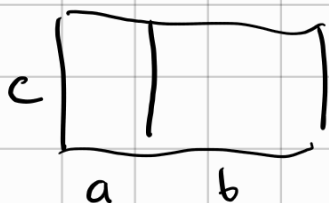
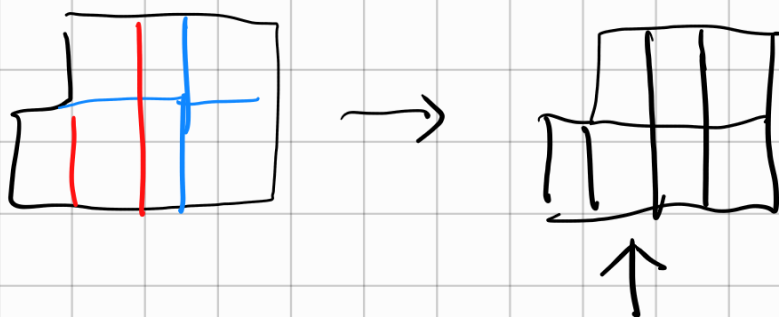
$$E = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_N$$

R_N rettangolo cartesiano

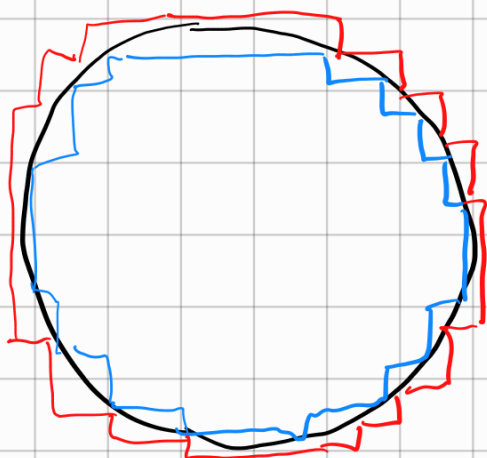
$R_k \cap R_j \subseteq \text{retta}$

$$m(E) := m(R_1) + m(R_2) + \dots + m(R_N)$$

↑ Teo se suddivido E in due modi
diversi ottengo lo stesso
risultato.



$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$



$$P \subseteq E \subseteq Q$$

P poliettagono Q poliettagono

$$m(P) \leq m(E) \leq m(Q)$$

(monotonia)

misura esterna

$$L_m^*(E) = \inf \{ m(Q) : Q \text{ poliettagono } Q \supseteq E \}$$

misura interna

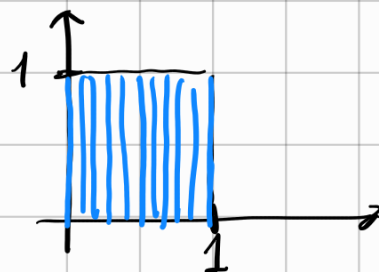
$$L_{m_*}(E) = \sup \{ m(P) : P \text{ poliettagono } P \subseteq E \}$$

Se $m^*(E) = m_*(E)$ diciamo che E è Peano-Jordan
misurabile e $m(E) = m^*(E) = m_*(E)$

↑
misura di E

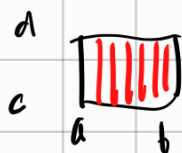
Puntiamo ci sono insiemi NON misurabili:

$$E = ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \times [0,1]$$



$$m^*(E) = m^*([0,1] \times [0,1]) = 1$$

$$m_*(E) = 0$$



se $a < b$
ci sono infiniti
tra a e b

Il prossimo anno (forse) vedrete una misura più "forte" chiamata misura di Lebesgue per la quale questo insieme $([0,1] \cap \mathbb{Q}) \times (0,1)$ è misurabile (ed ha misura nulla). Ma ci saranno insiemi non misurabili anche per Lebesgue

La misura di P-J si definisce su $\mathbb{R}^n$ allo stesso modo.

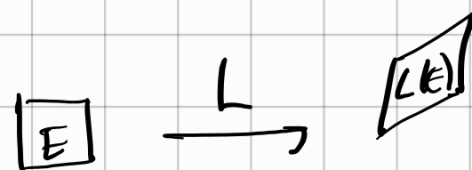
Con fatica si può mostrare che m è invariante anche per rotazioni.

se $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è lineare

Formula dell'area

$$m(L(E)) = |\det L| \cdot m(E).$$

significato geometrico del determinante



R rotazione $\det R = 1$.

$$m(\lambda E) = |\lambda|^n m(E) \quad \leftarrow \text{dilatazioni}$$

Perché non si fa con i triangolini come alla scuola elementare?



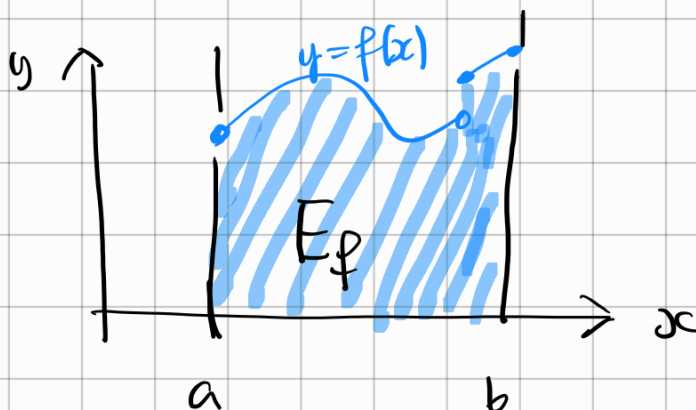
Nel piano lo potrei fare. Ma nello spazio questo metodo non funziona!

Tes (Dehn) non è possibile suddividere un tetraedro regolare in poliedri più piccoli che ricomposti mi diano un parallelepipedo retto.

⇒ Il volume di una piramide va definito tramite approssimazioni, come per la sfera.



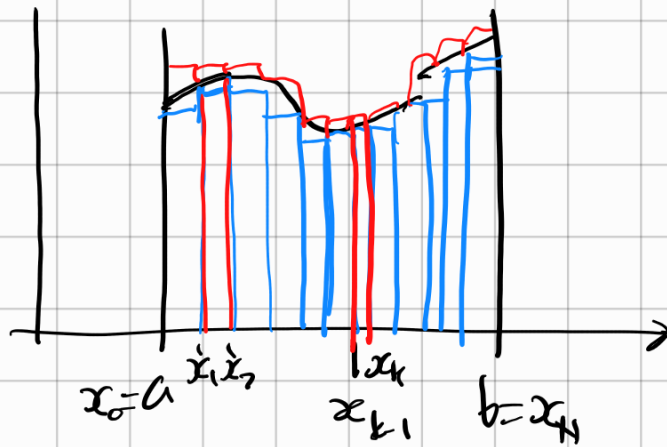
INTEGRALE DI RIEMANN



$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 f limitata

$\int_a^b f$ se $f \geq 0$ vuole essere l'area del sottografico

$$E_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] \right. \\ \left. 0 \leq y \leq f(x) \right\}$$



• Suddivisione di Riemann di $[a, b]$

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

$P \subseteq [a, b]$, P finito, $a, b \in P$.

somme superiori

$$S^*(f, P) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

base

altezza



$$S_*(f, P) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

somme inferiori

ovviamente

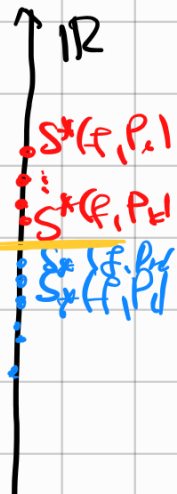
$$S^*(f, P) \geq S_*(f, P)$$

$$I^*(f) = \inf_{P \text{ suddivisione di } [a, b]} S^*(f, P)$$

integrale superiore
inferiore

P suddivisione di $[a, b]$

$$\int_a^b f$$



$$I_*(f) = \sup_{P \text{ suddivisione di } [a, b]} S_*(f, P)$$

Se $I^*(f) = I_*(f)$ diremo che

f è Riemann-integrabile e scriveremo

$$\int_a^b f = I^*(f) = I_*(f).$$

Lemma $\forall P, Q$ suddivisioni di $[a, b]$

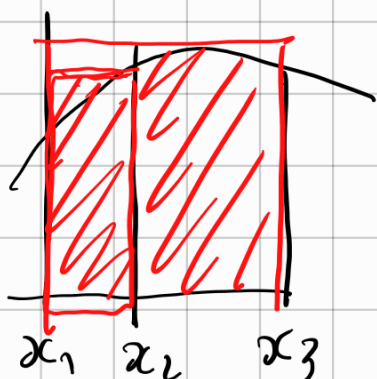
$$S^*(f, P) \geq S_*(f, Q)$$

dim

$$\begin{aligned} S^*(f, P) &\stackrel{(1)}{\geq} S^*(f, P \cup Q) \\ &\stackrel{(2)}{\geq} S_*(f, P \cup Q) \\ &\stackrel{(3)}{\geq} S_*(f, Q) \end{aligned}$$



①



$$\begin{aligned} (x_3 - x_1) \cdot \sup_{[x_1, x_3]} f &= (x_2 - x_1) \sup_{[x_1, x_2]} f + (x_3 - x_2) \sup_{[x_2, x_3]} f \\ &\geq (x_2 - x_1) \cdot \sup_{[x_1, x_2]} f + (x_3 - x_2) \sup_{[x_2, x_3]} f \end{aligned}$$

$$(2) \quad \sup \geq \inf \quad (\text{gr-a ristretto})$$

(3) è analogo a (1) con l'inf. $\square$

Teo [criteri di integrabilità] $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, limitata.

1. f è R-integrabile $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ esiste una suddivisione P di $[a, b]$ tale che

$$S^*(f, P) - S_*(f, P) < \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ usa il lemma

$\Leftarrow$ ovvio dalla definizione

2. Se f è R-integrabile $\exists P_n$ una successione di suddivisioni di $[a, b]$

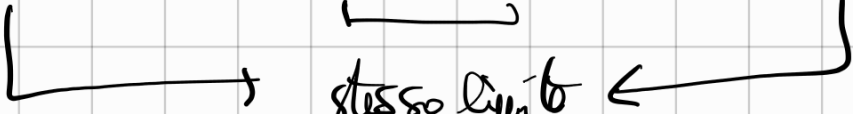
$$\int_a^b f \stackrel{(**)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} S^*(f, P_n) \stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} S_*(f, P_n)$$

(b) viceversa se esiste P_n tale che vale (*) allora f è integrabile e vale (**).

dim (a) usa (1) $\forall n \exists P_n \quad S^*(f, P_n) - S_*(f, P_n) < \frac{1}{n}$

(b) ovvio per la definizione di integrale:

$$S^*(f, P_n) \geq S^*(f) \geq S_*(f) \geq S_*(f, P_n)$$


 stesso limite

□