

16 gen 2026 - Lezione 42

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \log \left(1 + \frac{(-1)^k}{k^\alpha} \right)$$

Dirà per quali $\alpha > 0$ converge la serie

~~$$\log \left(1 + \frac{(-1)^k}{k^\alpha} \right) \sim \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$$~~

$$\log(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\log(1+x) = x + \underbrace{\log(1+x) - x}_{g(x) \sim -\frac{x^2}{2}}$$

$$\log \left(1 + \frac{(-1)^k}{k^\alpha} \right) = \frac{(-1)^k}{k^\alpha} + g \left(\frac{(-1)^k}{k^\alpha} \right)$$

addendo
di una serie
convergente $\forall \alpha > 0$

$$g \left(\frac{(-1)^k}{k^\alpha} \right) \sim -\frac{1}{2k^{2\alpha}} \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

addendo di una serie convergente se $\alpha > \frac{1}{2}$

Se $\alpha > \frac{1}{2}$ la serie $\sum \log(1 + \frac{(-1)^k}{k^\alpha})$ converge
 Se $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ la serie " diverge a $-\infty$

FUNZIONI ANALITICHE

Def: $A \subseteq \mathbb{R}$ (oppure $A \subseteq \mathbb{C}$)

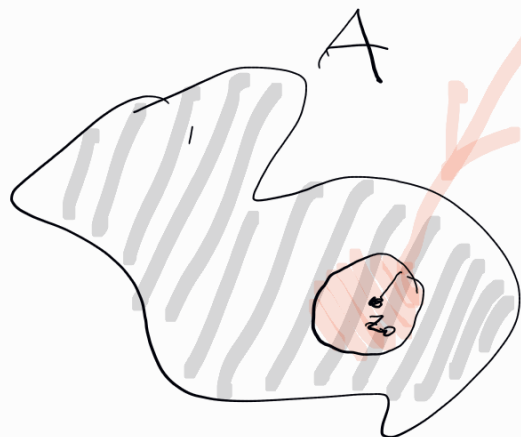
↑ insieme aperto

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ (o in $\mathbb{C}$)

si dice ANALITICA $\xLeftrightarrow{\text{def}}$

$\forall z_0 \in A \quad \exists R > 0$
 $\exists (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \forall z \in \underset{\mathbb{R}}{\mathbb{B}(z_0, R)}$$



Esempi: esp.

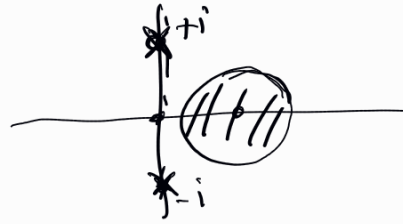
$\sin$

$\cos$

$$z \mapsto \frac{1}{z}$$

analitica su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ è analitica su $A = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$



PROPRIETÀ della SERIE DI POTENZE

PROP Se $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$ ha R.d.C.V. $R > 0$
 f definita $B_R(z_0)$

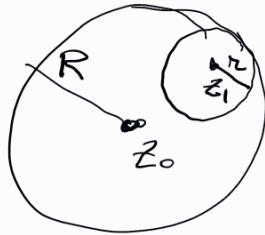
Allora

(i) f è continua in z_0

(ii) $\forall z_1 \in B_R(z_0) \quad \exists (b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ t.c.

$$f(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j (z-z_1)^j \quad \forall z \in B_r(z_1)$$

con $r = R - |z_1 - z_0|$



(iii) f è continua in $B_R(z_0)$

Dim: Supp. suppongo $z_0 = 0 \rightsquigarrow f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$

$$(i) \quad f(z) - f(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k - a_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^k$$

limita in un intorno di 0

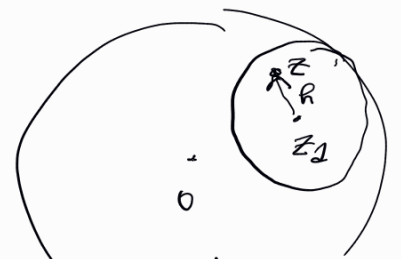
$$= z \left[\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+1} z^k \right]$$

$|z| \rightarrow 0 \rightarrow 0$

(ii) $z = z_1 + h$ con $|h| < r = R - |z_1|$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z_1 + h)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} z_1^{k-j} h^j$$



$$\binom{k}{j} = \begin{cases} \frac{k!}{j!(k-j)!} & 0 \leq j \leq k \\ 0 & \text{alt.} \end{cases}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_k \binom{k}{j} z_1^{k-j} h^j$$

$h = z - z_1$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \binom{k}{j} z_1^{k-j} \right] h^j$$

(*) è legittimo * la serie è assolutamente convergente

$|z_1| + |h| \in B_R(0) \Rightarrow \sum a_k (|z_1| + |h|)^k$ è ass. convergente
cioè

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| (|z_1| + |h|)^k < +\infty$$

[...] con gli stessi passaggi visti sopra

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} |a_k| \binom{k}{j} |z_1|^{k-j} |h|^j$$

l'assoluta convergenza è verificata

(iii) f si scrive come serie di potenze centrata in $z_1 \in B_R(z_0)$
 $\Rightarrow f$ continua in $z_1 \quad \forall z_1 \in B_R(z_0)$
 per il punto (i)

DEF: $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto $f: A \rightarrow \mathbb{C}$

f è DERIVABILE in senso complesso



$$\forall z_1 \in A \quad \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_1+h) - f(z_1)}{h} \in \mathbb{C}$$

$\hookrightarrow f'(z)$

$z \mapsto z^k$ è derivabile in senso complesso

$z \mapsto \frac{1}{z}$ "

$\exp z$ 

$z \mapsto \bar{z}$ non è deriv. in senso complesso

TEO Se $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$ converge su $B_R(z_0)$ (con $R > 0$)

Allora

(i) f è derivabile in senso complesso su $B_R(z_0)$ e $f'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (z-z_0)^{k-1}$

(ii) f è derivabile infinite volte su $B_R(z_0)$

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1) \cdots (k-m+1) a_k (z-z_0)^{k-m}$$

(iii) In particolare

$$\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} = a_m$$

$$(iv) f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k + o(|z-z_0|^n)$$

Dim (i) Spg: $z_0 = 0$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

$z \in B_R(0)$
fissato
 $h \rightarrow 0$
e $|h| < R - |z|$

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} =$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \left((z+h)^k - z^k \right)$$

$$(z+h)^k = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} z^{k-l} h^l$$

if $l=0 \rightarrow z^k$

$$= \cancel{\frac{1}{h}} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sum_{l=1}^{\infty} \binom{k}{l} z^{k-l} h^{l-1}$$

$$l-1 = j$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_k \binom{k}{j+1} z^{k-j-1} h^j$$

$$\stackrel{(*)}{=} \sum_{j=0}^{+\infty} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \binom{k}{j+1} z^{k-j-1} \right] h^j$$

C_j

Abbiamo così ottenuto

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j h^j$$

$h \rightarrow 0$

$$c_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k k z^{k-1}$$

(*) è giustificato se provo che
la serie è assolutamente converg.

$$\text{Se } \begin{cases} |h| < R - |z| \\ |z| < R \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (|z| + |h|)^k$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k |z|^k$$

sono assolut. conv.

$$\frac{1}{|h|} \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \left[(|z|+|h|)^k - |z|^k \right] \text{ converge}$$

$$\begin{matrix} \parallel \\ [\dots] \\ \parallel \end{matrix}$$

$$- \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} |a_k| \binom{k}{j} |z|^{k-j-1} |h|^j < +\infty$$

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1} \quad \text{cvd}$$

Il R d CV di questa serie
è lo stesso di $\sum a_k z^k$

(ii) si dimostra per induzione

(222) (iv) verifica per
esercizio ~~###~~

PROP: Se $f: A \rightarrow \mathbb{C}$

è analitica e esiste
 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$, t.c. $x_n \rightarrow \bar{x} \in A$

e $f(x_n) = 0 \quad \forall n$

$\Rightarrow f(z) \equiv 0$ su $B_r(\bar{x})$
con $r > 0$

(In altre parole, f ha solo zeri isolati in A .)
(NB: potrebbe esistere $x_n: x_n \rightarrow \bar{x} \in \partial A \setminus A$ e $f(x_n) = 0 \quad \forall n$)

Dim: Spg $\bar{x} = 0$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \quad \text{su } B_r(0)$$

$f \neq 0$ sia k_0 il minimo
indice t.c. $a_k \neq 0$

$$f(z) = z^{k_0} (a_{k_0} + o(1))$$

Di conseguenza 0 deve
essere uno zero isolato di f

Es: Mostrare che se

A è connesso allora

$$\& \exists z_0 \in A: f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f(z) = 0 \quad \forall z \in A$$

(dimostrarlo almeno per funz. reali)

Applicazioni

alcaldo
se $|x| < 1$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

$$X f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k x^k = \frac{X}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 x^k = ?$$

$$X^2 f''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) x^k$$

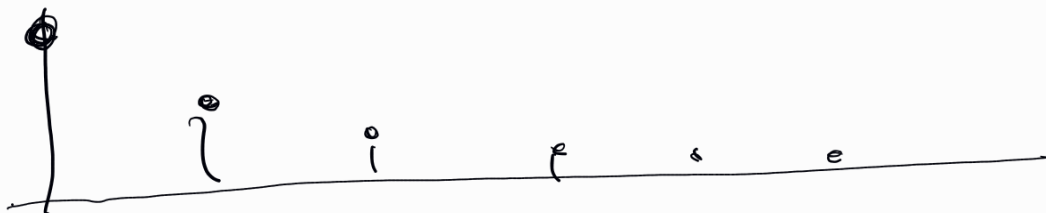
$$f''(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k - \sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}$$

$$(1-x)x^k$$



Questi conti li rivedrete

quando calcolerete
media e varianza
di una distribuzione
di probabilità
geometrica

$$P(\cancel{X}=k) = (1-p) p^k$$

Probabilità che il
risultato di un esperimento sia $k \in \mathbb{N}$

NB: $\sum_{k \in \mathbb{N}} (1-p) p^k = 1$

Esercizio: $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ succ. di FIBONACCI
XCASA $(F_{k+2} = F_{k+1} + F_k)$

Scrivere l'espressione
analitica

di $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} F_k z^k$

(f è una funzione razionale!)

