

14 gen 2026

Lezione n° 41

Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin^2 x + b(1 - \cos x)}{x^4} = 1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^2 \\ &= x^2 - 2 \frac{x^4}{6} + o(x^4) \end{aligned}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$N = ax^2 + b \frac{x^2}{2} - \frac{ax^4}{3} - \frac{bx^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\frac{N}{x^4} \rightarrow 1 \iff$$

$$a + \frac{b}{2} = 0$$

$$\text{et } -\frac{a}{3} - \frac{b}{4!} = 1$$

$$a \text{ o } e \quad b = -2a$$

$$-\frac{a}{3} + \frac{\cancel{2a}}{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2}} = 1$$

$$\frac{a}{3} \left(-1 + \frac{1}{4} \right) = 1$$

$$-\frac{a}{3} \frac{3}{4} = 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 8 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\begin{aligned} f(x) &\sim c_1 x^n \\ g(x) &\sim c_2 x^m \end{aligned} \quad x \rightarrow 0$$

Def: Il primo monomio non nullo dello sviluppo di Taylor di f in x_0 si chiama PARTE PRINCIPALE di f in x_0

Es: p.p. di $1 - \cos x$ in $x_0 = 0$

$$\text{è } \frac{x^2}{2}$$

$$\left(1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \right. \\ \left. \text{per } x \rightarrow 0 \right)$$

chi è la p.p. di

$$f(x) = (\sin x)^n - \sin(x^n) \quad ? \quad (n \geq 2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

$$\sin(x^n) = x^n - \frac{x^{3n}}{6} + o(x^{4n})$$

$$(\sin x)^n = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^n = x^n - n \frac{x^{n+2}}{6} + o(x^{n+2}) \quad \text{se } n \geq 2$$

$$f(x) = -n \frac{x^{n+2}}{6} + \frac{x^{3n}}{6} - o(x^{n+2})$$

$$n+2 < 4n$$

Parte principale di f
se $n \geq 2$

perché $3n > n+2$ se $n \geq 2$

Esercizio: **in CASA**

Determinare α in modo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\log(1+x)) - \log(1+\sin x)}{x^\alpha} \in \mathbb{R}_*$$

RESTO DI LAGRANGE

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

per $\xi \in (x_0, x)$

Def. di derivata

$$\hookrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \boxed{o(x-x_0)} \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

$$f(x) = f(x_0) + \boxed{f'(\xi)(x-x_0)}$$

$\xi \in (x_0, x)$

Caso base resto di Peano

Caso base resto di Lagrange

Esempi di applicazione

Se $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $f''(x) \geq 0$ allora

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

(Fatto già visto)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \boxed{\frac{f''(\xi)}{2} (x-x_0)^2}$$

$$\downarrow$$
$$\geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$\uparrow$
 $e' \geq 0!$

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

← Anche questo l'abbiamo già visto, ma lo ri-dimostreremo usando la formula di Taylor

Devo verificare che $\forall x \in \mathbb{R}$ fissato

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$$

$$e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \boxed{\frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}} \rightarrow R_{n+1}$$

$0 < |\xi| < |x|$

$$|R_{n+1}| \leq \underbrace{e^{|x|}}_{\substack{\text{costante} \\ \text{(non dipende da } n\text{)}}} \underbrace{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}_{\substack{\text{addendo di una} \\ \text{serie convergente}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

addendo di una
serie convergente

PROP: $e \notin \mathbb{Q}$

Dims: ovviamente $e \notin \mathbb{N}$

$$2 < e < 3$$

Supponiamo per assurdo che

$$e = \frac{p}{q} \quad \text{con } p \in \mathbb{N} \\ q \geq 2$$

$$e^1 = \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} + \frac{e^{\xi}}{(q+1)!} \quad \xi \in (0,1)$$

$\uparrow$ Resto di Lagrange

Formula di Taylor

di ordine $n = q$ per $f(x) = e^x$ con $x_0 = 0$
 $x = 1$

con resto di Lagrange

$$q! \frac{p}{q} = p(q-1)! = \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} + \frac{e^{\xi}}{q+1}$$

$$\frac{e^3}{9+1} = \underbrace{\sum_{k=0}^9 \frac{9!}{k!}}_{\uparrow} + P(9-1)!$$

$\mathbb{Z}$

$$0 < \frac{e^3}{9+1} < \frac{3}{3} = 1$$



$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$



si dimostra come l'analogo risultato per e^x

Es. Determinare $\sin(1)$

con una precisione di 10^{-3}

NB: A volte la serie di Taylor di una funzione ha raggio di convergenza finito

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

$$|x| < 1$$

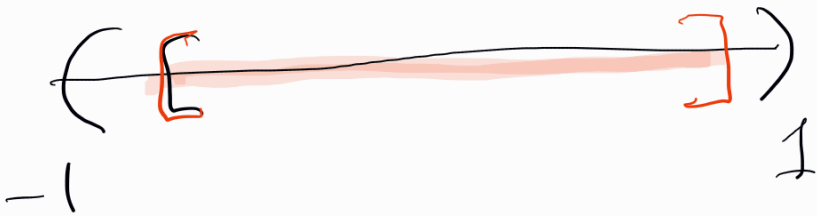
← Anche questo lo abbiamo già visto...

FATTO

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall r < 1$$

$$\exists n \text{ t.c.} \quad \left| \frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^n x^k \right| \leq \varepsilon$$

$$\forall x \in [-r, r]$$



$$(*) = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right|$$

Conseguenza

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x^2)^k$$

Serie di potenze
con raggio di conv.
 $R=1$

funzione
 $C^\infty(\mathbb{R})$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}$$

Questa è una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
dove $|a_n| = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

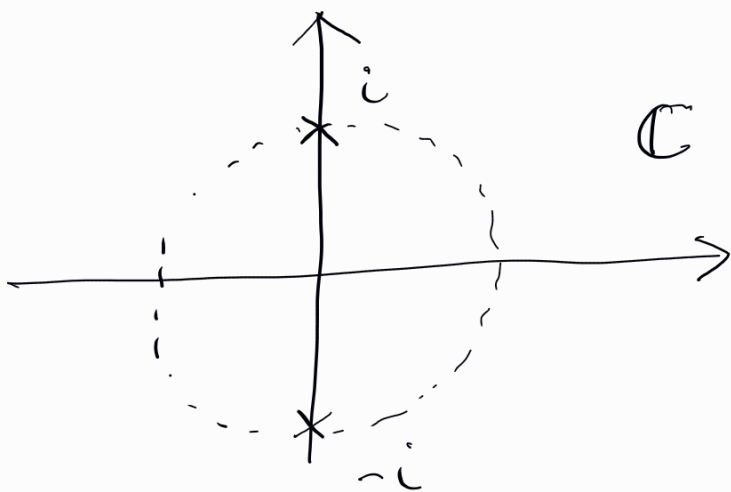
Per cui

$$L \doteq \limsup_{n \rightarrow +\infty}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

$$R = \frac{1}{L} = 1$$

Raggio di CV
della serie



A pensarci bene ciò non è
poi così strano, dato che
 $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ ha due punti
singolari ($\pm i$) proprio sul bordo
del disco unitario...

Calcolare

$$\sqrt{10010}$$

con un

$$\text{errore} < 10^{-3}$$

Sugg: $\sqrt{10000} = 100$

$$\sqrt{10000 + 10} = 100 \sqrt{1 + \frac{1}{1000}}$$

Usare

$$(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{8} (1+\xi)^{-\frac{3}{2}} \varepsilon^2 \quad \xi \in (0, \varepsilon)$$

$$\text{con } \varepsilon = \frac{1}{1000}$$