

ANALISI MATEMATICA B

LEZIONE 40 - 12.1.2026

POLINOMIO DI TAYLOR

ES. $f(x) = x^2 + \cos(x^2) - x \sin x$ $f(0) = 1$

$x_0 = 0$ è massimo/minimo locale?

- come calcolo le derivate di f in $x_0 = 0$?

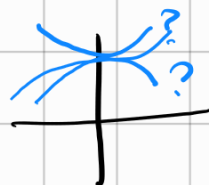
$$f'(x) = 2x - \sin(x^2) \cdot 2x - \sin x - x \cos x$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 2 - \cos(x^2) \cdot 4x^2 - 2 \sin(x^2) - \cos x + x \sin x$$

$$f''(0) = 2 - 1 - 1 = 0$$

$$f'''(x) = \dots$$



E' più semplice calcolare il polinomio di Taylor.

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

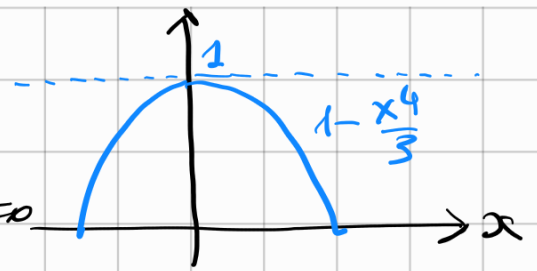
$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \quad \leftarrow$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \leftarrow$$

$$f(x) = x^2 + \cos x^2 - x \sin x = \cancel{x^2} + 1 - \frac{x^4}{2} - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$1 - \frac{x^4}{3}$ ha massimo assoluto in $x=0$



f non ha minimo assoluto ($f(x) \rightarrow +\infty$ se $x \rightarrow +\infty$)

ma f potrebbe avere un massimo locale in $x=0$.

Questo è vero perché:

$$f(x) = 1 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) = 1 + x^4 \left(-\frac{1}{3} + o(1) \right)$$

$\uparrow$
 ≥ 0

$\downarrow$
 $-\frac{1}{3}$ in $x \rightarrow 0$
è < 0 in un
intorno di $x_0=0$

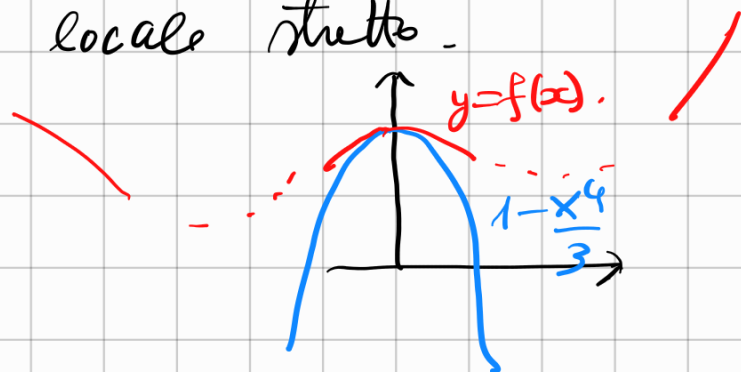
Quindi in un intorno di $x_0=0$

$$\textcircled{\times} \leq 0 \text{ and } < 0 \text{ se } x \neq 0$$

$$f(x) \leq 1 \text{ in un intorno di } 0$$

$$< 1 \text{ se } x \neq 0$$

$\Rightarrow x_0=0$ è un massimo locale stretto.



In generale se:

$$f^{(k)}(x_0) = 0$$

$$\text{per } k=1, \dots, n-1$$

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + o(|x-x_0|^n)$$

$$= f(x_0) + (x-x_0)^n \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right]$$

se n è dispari $(x-x_0)^n > 0$ se $x > x_0$
 < 0 se $x < x_0$
 x_0 non è né max né min
 (tipo punto di flesso orientabile)

se n è pari

$f^{(n)}(x_0) > 0$ x_0 è un minimo locale
 stretto

$f^{(n)}(x_0) < 0$ x_0 è un massimo locale
 stretto.

CRITERIO DI ORDINE SUPERIORE
 PER L'IDENTIFICAZIONE DEI PUNTI CRITICI (MAX/MIN).

Possiamo usare i polinomi di Taylor per
 calcolare le derivate di ordine successivo in
 un punto fissato.

ES : $f(x) = x^2 + \cos(x^2) - x \sin x$

Quanto fa $f'''(0)$? Quanto fa $f^{(4)}(0)$?

$$f(x) = 1 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

Per il "viceversa" della formula di Taylor
con resto di Peano

$$P(x) = 1 - \frac{x^4}{3} \text{ è il polinomio di Taylor}$$

di ordine 4 centrato in $x=0$:

$$1 - \frac{x^4}{3} = f(x_0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$f(0)=1, f'(0)=0, f''(0)=0, f'''(0)=0$$

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -\frac{1}{3}$$

$$f^{(4)}(0) = -\frac{4!}{3} = -8$$

$$f^{(4)}(0)?$$

$$f(x) = x^2 + \cos(x^2) - x \sin x$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4)$$

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} + o(x^8)$$

$$x \sin x = x \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right)$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120} + o(x^6) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$f(x) = \cancel{x^2} + 1 - \frac{x^4}{2} + \cancel{\frac{x^8}{24}} + \cancel{o(x^8)} - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^6}{120} + o(x^6)$$

$$= 1 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{120} + o(x^6)$$

↳ è il P.d.Taylor di ordine 6

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = -\frac{1}{120} \Rightarrow f^{(6)}(0) = -6$$

Gli sviluppi di Taylor possono essere utili per determinare il carattere di una serie (o di un integrale, lo vedremo).

E)

$$\sum \ln n \cdot \left(n \sin \frac{1}{n} - 1 \right) \quad \text{converge?}$$

per $n \rightarrow \infty$ $x = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

per $x \rightarrow 0$
 $x = \frac{1}{n}$
 $n \rightarrow \infty$

$$a_n = \ln n \cdot \left(n \sin \frac{1}{n} - 1 \right)$$

$$= \ln n \cdot \left(n \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) - 1 \right)$$

NOTA
 $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$
 non possiamo Taylor

$$= -\ln n \cdot \left(\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) =$$

$$(n \rightarrow \infty)$$

$$= -\frac{\ln n}{6n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

$$1+o(1) \sim 1$$

o meglio

$$= -\frac{\ln n}{6n^2} (1 + o(1))$$

$$\sim -\frac{\ln n}{6n^2}$$

n

$\sum a_n$ ha lo stesso carattere di $-\sum \frac{\ln n}{6n^2}$

Ma $\frac{\ln n}{6n^2} \ll \frac{n^{1/2}}{6n^2} = \frac{1}{6n^{3/2}} \quad \sum \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$

perché $p = \frac{3}{2} > 1$

Esercizio

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0$$

Per fare lo sviluppo di Taylor per $x \rightarrow 0$,
devo definire $f(0)$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

f è continua. È derivabile?

Per $x \neq 0$

$$f'(x) = \left(e^{-\frac{1}{x^2}} \right)' = 2x^{-3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f'(x) = 2 \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{l} \text{Per } t \rightarrow +\infty \\ e^t \gg t^n \\ \frac{1}{e^t} \ll \frac{1}{t^n} \\ e^t \ll t^{-n} \end{array}$$

Criterio di derivabilità $f'(0) = 0$

Per $x \neq 0$ $f''(x) = (-6x^{-4} + 2x^{-3} \cdot 2x^3) e^{-\frac{1}{x^2}}$
 $= (-6x^{-4} + 4x^{-6}) e^{-\frac{1}{x^2}}$

$f''(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0 \Rightarrow f''(0) = 0$.

⋮

$f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k. \Rightarrow f \in C^\infty$

Tutti i polinomi di Taylor sono nulli!

$f(x) = 0(x^n)$

$\forall n. \Rightarrow f$ non è analitica!

Se fosse $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$
 $= \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$
 $\leftarrow$ $a_k = 0 \quad \forall k.$ $\leftarrow$ P di Taylor
 $f(x) = 0$ ASSURDO!

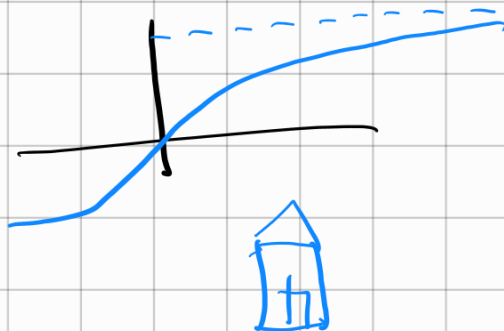
Esercizio Sviluppare archip x per $x \rightarrow +\infty$

archip $x = ? = \frac{\pi}{2} + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad x \rightarrow +\infty$

② $t = \frac{1}{x} \quad x \rightarrow +\infty \quad t \rightarrow 0^+$

archip $x =$ archip $\frac{1}{t}$ -----

$f(t) = \begin{cases} \text{archip } \frac{1}{t} & \text{per } t \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{per } t = 0 \end{cases}$



VOGLIAMO CONOSCERE TUTTI GLI SVILUPPI DI TAYLOR DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

Per $x \rightarrow 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$f(x) = (1+x)^d$$

$$f'(x) = d(1+x)^{d-1}$$

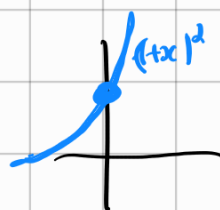
$$f''(x) = d(d-1)(1+x)^{d-2}$$

$\vdots$

$$f^{(k)}(x) = \underbrace{d(d-1)\dots(d-k+1)}_{k \text{ fattori}} (1+x)^{d-k}$$

$$f^{(k)}(0) = d(d-1)\dots(d-k+1)$$

$$(1+x)^d = 1 + dx + \frac{d(d-1)}{2}x^2 + \frac{d(d-1)(d-2)}{3!}x^3 + \dots + \binom{d}{n}x^n + o(x^n)$$



$$f'(0) = d$$

$$f''(0) = d(d-1)$$

Def. $\binom{d}{n} = \frac{d(d-1)\dots(d-n+1)}{n!}$

Es $f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + \frac{(-1)(-2)}{2} x^2 + \dots$
 $= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)^n n!}{n!} = (-1)^n$$

Es $f(x) = \ln(1+x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$
