

ANALISI MATEMATICA B

LEZIONE 39 - 9.1.2026

Polinomi di Taylor

f, x_0, n

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

Formula di Taylor con resto di Lagrange:

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1} \quad t \in (x_0, x)$$

Formula di Taylor con resto di Peano:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \quad (*)$$

Viceversa: se Q è un polinomio di grado $\deg Q \leq n$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

allora $Q = P$ è il polinomio di Taylor di f centrato in x_0 di ordine n .

dim [Viceversa] P e Q soddisfanno (*)

$$\frac{P(x) - Q(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{\cancel{f(x) - Q(x)} - \cancel{f(x) - P(x)}}{\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{(x - x_0)^n}} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

$$R(x) = P(x) - Q(x), \quad \deg R \leq n$$

$$\frac{R(x)}{(x - x_0)^n} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

$$R(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

$$\frac{a_0 + \cancel{a_1(x - x_0)} + \cancel{a_2(x - x_0)^2} + \dots + \cancel{a_n(x - x_0)^n}}{(x - x_0)^n} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

se fosse $a_0 \neq 0$

il limite sarebbe $\pm \infty$

dunque $a_0 = 0$

$$\frac{R(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{a_1 + a_2(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^{n-1}}{(x - x_0)^{n-1}}$$

deve essere $a_1 = 0$

... etc. ... $a_2 = 0, a_3 = 0, \dots, a_n = 0 \quad \square$

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^3}$$

l'Hospital?

$$\frac{2(\sin x - x)(\cancel{\cos x - 1})}{-3(\cos x - 1)^2 \sin x}$$

$$\frac{2(\cos x - 1)}{3 \sin^2 x - 3(\cos x - 1) \sin x}$$

$$- 2 \sin x$$

$$\frac{6 \sin x \cos x + 3 \sin^2 x - 3(\cos x - 1) \cos x}{- 2 \cos x}$$

$$6 \cos^2 x - 6 \cancel{\sin^2 x} + 6 \cancel{\sin x} \cos x - 3 \cos x (-1) \dots$$

$$\rightarrow -\frac{2}{9}$$

Meglio usare la formula di Taylor:

$$\frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^n} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow x_0$$

$$f(x) - P(x) = o((x - x_0)^n)$$

per $x \rightarrow x_0$

$$f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\frac{(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^3} = \frac{\left(-\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}{\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^3} \stackrel{?}{\sim} \frac{\frac{x^6}{36}}{-\frac{x^6}{8}} = -\frac{8}{36} = -\frac{2}{9}$$

DOBBIAMO IMPARARE L'ALGEBRA DEGLI o-piccolo.



$$\sin x = x + o(x)$$

$$\sin x - x = o(x)$$

$$\frac{(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^3} \stackrel{??}{\sim} \frac{0}{-\frac{x^6}{8}} = 0$$

FORMALIZZIAMO ?

$$o(x^3) << x^3$$

$$\begin{aligned} \frac{\left(-\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}{\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^3} &= \frac{\left(-\frac{x^3}{6} \left(1 + \frac{o(x^3)}{-\frac{x^3}{6}}\right)\right)^2}{\left(-\frac{x^2}{2} \left(1 + \frac{o(x^2)}{-\frac{x^2}{2}}\right)\right)^3} \\ &= \frac{\cancel{\frac{x^6}{36}} \cdot \left(1 + \frac{o(x^3)}{-\frac{x^3}{6}}\right)^2}{-\cancel{\frac{x^6}{8}} \cdot \left(1 + \frac{o(x^2)}{-\frac{x^2}{2}}\right)^3} = -\frac{8}{36} \frac{\left(1 + \frac{o(x^3)}{-\frac{x^3}{6}}\right)^2}{\left(1 + \frac{o(x^2)}{-\frac{x^2}{2}}\right)^3} \rightarrow -\frac{8}{36} \end{aligned}$$

NOTA

$$\frac{o(x^3)}{-\frac{x^3}{6}} = \frac{o(x^3)}{x^3} \cdot (-6) = o(1) \cdot (-6) = o(1)$$

$$C \neq 0$$

$$f(x) \cdot o(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x))$$

$$C \cdot o(f(x)) = o(f(x))$$

$$o(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot o(g(x))$$

$$\frac{(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^3} = \frac{\left(-\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}{\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^3} = \frac{\cancel{\frac{x^6}{36}}}{-\cancel{\frac{x^6}{8}}} \frac{\left(1 + \frac{o(x^3)}{-\frac{x^3}{6}}\right)^2}{\left(1 + \frac{o(x^2)}{-\frac{x^2}{2}}\right)^3} \rightarrow -\frac{8}{36}$$

Esercizio 1 (foglio esercizi)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(x^2)} + 2\cos x - 3}{\sin(x^2) - \sin^2 x}$$

Formula di Taylor resto di Peano

per $t \rightarrow 0$
allora posto

$$t = x^2$$

se $x \rightarrow 0$ $t \rightarrow 0$

$$e^t = 1 + t + o(t)$$

$$[e^t - (1+t) = o(t)]$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$$

$$[e^{x^2} - (1+x^2) = o(x^2)]$$

SARÀ VERO che se $f(t) = o(t)$ cioè $\frac{f(t)}{t} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow 0$

allora $f(x^2) = o(x^2)$ cioè $\frac{f(x^2)}{x^2} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$

SI, è il cambio di variabile in un limite.



$$t = \cos x \quad \text{se } x \rightarrow 0 \quad t \rightarrow 1$$

MA POSSO

FARE:

$$o(\cos x) = o(t)$$

$$\text{per } x \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\text{per } t \rightarrow 0$$

Nota

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$$

Viceversa nel Teorema

$\Rightarrow 1+x^2$ è il P. di Taylor di ordine 2 centrato in $x=0$ di e^{x^2}

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$e^{x^2} + 2\cos x - 3 = \cancel{1} + \cancel{x^2} + o(x^2) + 2(\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x^2)) - \cancel{3}$$

$$= o(x^2) + \cancel{2}o(x^2)$$

$$= o(x^2)$$

|| SOSPETTO CHE NON SIA
SUFFICIENTE!



$$o(x^2) - o(x^2)$$

$$= o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$$

No!
= 0

$$\sin(x^2) - \sin^2 x = \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2$$

$$= \cancel{x^2} - \cancel{\frac{x^6}{6}} + o(x^6) - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4) = \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$(A+B+C)^2 = (A+B+C)(A+B+C)$$

$$= A^2 + AB + AC + BA + B^2 + BC + CA + CB + C^2$$

$$= A^2 + 2AB + 2AC + B^2 + 2BC + C^2$$

$$\left(o(x^3)\right)^2 = o(x^3) \cdot o(x^3) = o((x^3)^2) = o(x^6)$$

REGOLA:

$$o(f(x)) \cdot o(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x))$$

$$2 o(x^3) \cdot \left(-\frac{x^3}{6}\right) = o(x^6)$$

$$\left(-\frac{x^3}{6}\right)^2 = \frac{x^6}{36} \quad \text{ma} \quad \frac{x^6}{36} + o(x^4) = o(x^4)$$

$$\frac{m}{m} = \frac{o(x^2)}{\frac{x^4}{3} + o(x^4)} = \frac{o(x^2)}{x^4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3} + o(1)}$$

$$= \frac{o(1)}{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3} + o(1)}$$

FORMA INDETERMINATA!

DEVO SVILUPPARE MEGLIO IL NUMERATORE

$$e^{x^2} + 2\cos x - 3 = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} + o(x^4)$$

$$+ 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - 3$$

$$= \frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{12} + o(x^4) = \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)$$

$$\frac{e^{x^2} + 2\cos x - 3}{\sin(x^2) - \sin^2 x} = \frac{\frac{7}{12}x^4 + o(x^4)}{\frac{x^4}{3} + o(x^4)} = \frac{x^4}{x^4} \cdot \frac{\frac{7}{12} + o(1)}{\frac{1}{3} + o(1)}$$

$$\rightarrow \frac{\frac{7}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{7}{4}$$

□

$$\begin{aligned} & o(x^4) + \overbrace{o(x^7) + x^5} \\ &= o(x^4) + o(x^4) + o(x^4) \\ &= o(x^4) \end{aligned}$$