

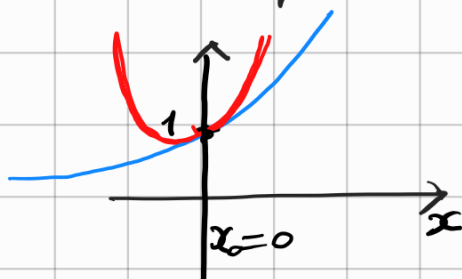
ANALISI MATEMATICA B

LEZIONE 38 — 7.1.2026

FORMULA DI TAYLOR

Idea: approssimare una funzione tramite un polinomio:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad \text{per } x \rightarrow 0$$



Polinomio di Taylor

Data f definita in un intervallo I con $x_0 \in I$ derivabile almeno n volte.

Il polinomio di Taylor di ordine n centrato in x_0 è quel polinomio $P(x)$ con $\deg P \leq n$, tale che

$$(*) \quad P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \forall k = 0, \dots, n \quad (n+1 \text{ condizioni})$$

$f^{(k)}(x)$ è la derivata k -esima di f :

$$f^{(1)}(x) = f'(x) \quad f^{(2)} = f''(x) \quad f^{(3)} = f'''(x) \dots$$

$$f^{(0)}(x) = f(x).$$

$$\begin{cases} f^{(0)}(x) = f(x) \\ f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x). \end{cases} \quad (\text{FORMALMENTE})$$

Vediamo che le condizioni $(*)$ identificano univocamente P .

Sia P un qualunque polinomio di grado $\leq n$.
 $(x-x_0)^0 = 1$ anche $x=x_0$.

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

$$P'(x) = \sum_{k=1}^n k \cdot a_k (x-x_0)^{k-1} = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \dots + n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

$$P''(x) = \sum_{k=2}^n k \cdot (k-1) a_k (x-x_0)^{k-2}$$

$$\vdots$$

$$P^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^n k(k-1)(k-2)\dots(k-j+1) a_k (x-x_0)^{k-j}$$

$$P^{(j)}(x_0) = j(j-1)\dots \cdot 1 \cdot a_j = j! a_j$$

$$P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad (\Leftrightarrow) \quad k! a_k = f^{(k)}(x_0)$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Il polinomio di Taylor di ordine n per f centrato in x_0 è:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

Esempio 1 Il P. di Taylor della funzione $f(x) = e^x$ di ordine 2 centrato in $x_0 = 0$ è:

$$P(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$f(x) = e^x, f'(x) = e^x, f''(x) = e^x$$

$$f(x_0) = e^0 = 1, f'(x_0) = e^0 = 1, f''(x_0) = e^0 = 1.$$

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$P(0) = 1$$

$$P'(x) = 1 + x$$

$$P'(0) = 1$$

$$P''(x) = 1$$

$$P''(0) = 1$$

$$f(x) = e^x$$

$$f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x$$

$$f''(0) = 1$$

Esempio 2 $f(x) = \sin x$, P il polinomio di

Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x-x_0)^3$$

$$= \cancel{\sin 0} + \cos 0 \cdot x - \cancel{\sin 0} \frac{x^2}{2!} - \frac{\cos 0}{3!} x^3$$

$$= x - \frac{x^3}{6}$$

Esempio 3 $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$, $n = 3$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f'(x) = -x^{-2}, \quad f''(x) = 2x^{-3}, \quad f'''(x) = -6x^{-4}$$

$$f(x_0) = f(1) = 1, \quad f'(1) = -1, \quad f''(1) = 2, \quad f'''(1) = -6$$

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$$

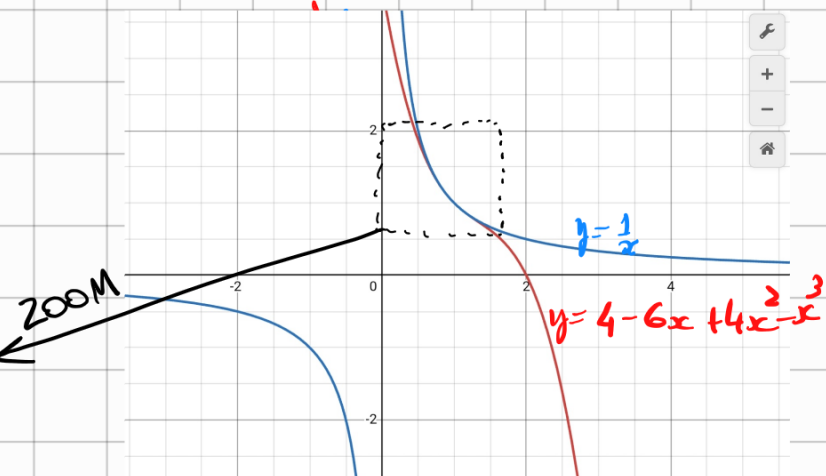
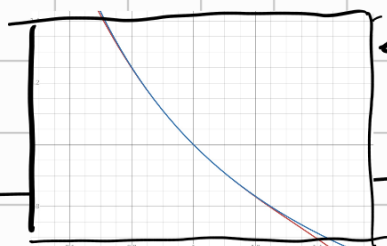
$$= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3$$

$$= 1 - x + 1 + x^2 - 2x + 1 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1$$

$$= 4 - 6x + 4x^2 - x^3$$

$$P(1) = 4 - 6 + 4 - 1 = 1$$

$$P'(1) = -6 + 8 - 3 = -1$$



Osservazione

Se P è il polinomio di Taylor di f di ordine n centrato in x_0 allora

P' è il polinomio di Taylor di f' di ordine $n-1$ centrato in x_0 .

(ovvio dalla definizione)

Esempio $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \cos x$$

$$x_0 = 0$$

$$P(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$P'(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$x_0 = 0$$

$$n = 2$$

è infatti il polinomio di $\cos x$, ordine 2 è

$$\begin{aligned} Q(x) &= \cos 0 + \cos'(0) \cdot x + \frac{\cos''(0)}{2!} x^2 \\ &= \cos 0 - \sin(0) \cdot x - \frac{\cos(0)}{2} x^2 \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

TEOREMI DI TAYLOR

Formula di Taylor con resto di Lagrange

Sia f derivabile $(n+1)$ volte in un intervallo I
Sia $x_0 \in I$, sia P il polinomio di Taylor di f
centrato in x_0 di ordine n .

Allora $\forall x \in I$ esiste $t \in (x_0, x)$ tale che

$$f(x) = P(x) + \boxed{\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}}$$

RESTO DI LAGRANGE

dim la tesi è equivalente a: $\forall n \forall f \forall x_0 \forall x \exists t$:

$$\textcircled{*} \quad \frac{f(x) - P(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

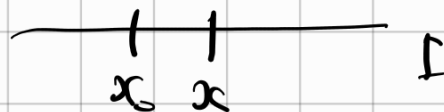
Per $\underline{n=0}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(t)$$

è il P. di Taylor di
ordine $n=0$ centrato
in x_0

è il teorema di Lagrange valido se f

f è derivabile in I .



Procediamo per induzione, supponendo che la tesi sia vera per un certo n .

Scriviamo l'espressione (*) con $(n+1)$ al posto di n :

$$\frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^{n+2}} = \frac{(f(x) - P(x)) - (f(x_0) - P(x_0))}{(x - x_0)^{n+2} - (x_0 - x_0)^{n+2}}$$

Cauchy: $\exists y \in (x_0, x)$

$$= \frac{f'(y) - P'(y)}{(n+2) \cdot (y - x_0)^{n+1}} = \frac{1}{n+2} \cdot \frac{(f')^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+2)!}$$

f è derivabile $n+2$ volte
 $\Downarrow$
 f' è derivabile $n+1$ volte

Passo induttivo
 P' è il P. di Taylor di f' di ordine n .
 con f' al posto di f
 e P' al posto di P
 e y al posto di x

$$\exists t \in (x_0, y) \subseteq (x_0, x)$$

Quello che volevamo dimostrare!

□



Formula di Taylor con resto di Peano $\swarrow$ I intervallo

f derivabile $(n-1)$ volte in I e n volte in x_0 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

P polinomio di Taylor di f centrato in x_0
di ordine $n \geq 1$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

$$\text{(ovvero } f(x) - P(x) \ll (x - x_0)^n \text{)}$$

dim per $n=1$ $P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$\frac{f(x) - P(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

se f è derivabile in x_0

Per induzione $n+1$ al posto di n Per induzione

$$\frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{\overset{\text{Cangy}}{f'(y) - P'(y)}}{(n+1)(y - x_0)^n} \xrightarrow{\quad} 0 \quad \text{per } y \rightarrow x_0$$

$y \in (x_0, x)$

se $x \rightarrow x_0$ anche $y \rightarrow x_0 \Rightarrow \underline{OK!}$ $\square$