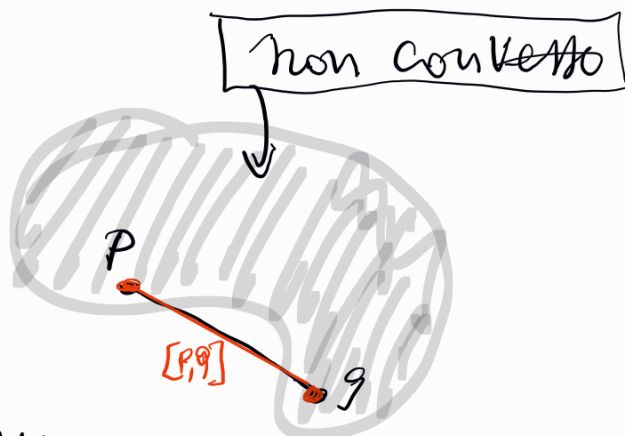
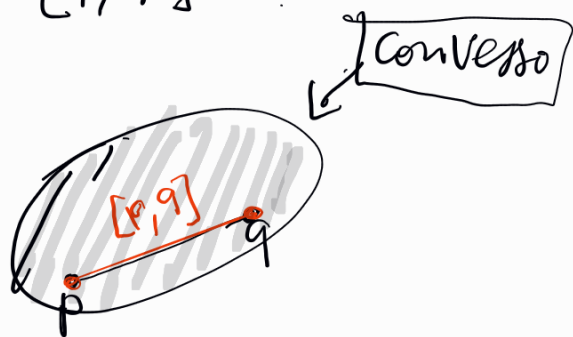


15 dic 2025 - LEZ. 35

CONVESSITÀ

Def: $C \subseteq \mathbb{R}^N$ si dice CONVESSO $\stackrel{\text{def}}{\iff} D$

$\forall p, q \in C$ $[p, q] := \{tp + (1-t)q : t \in [0, 1]\}$
 $[p, q] \subset C$
 $\uparrow$ segmento che congiunge p e q



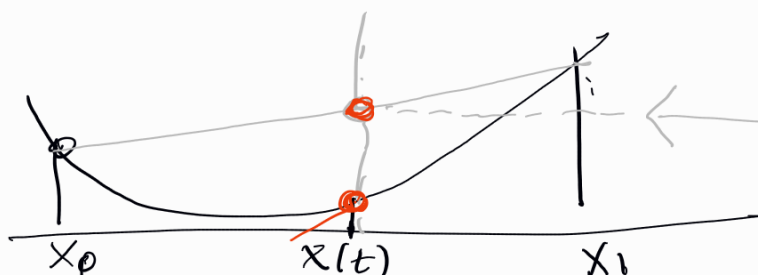
Oss: intersezione di convessi è convessa.

Def: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

f si dice convessa $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$\forall x_0, x_1 \in I$
 $\forall t \in [0, 1]$

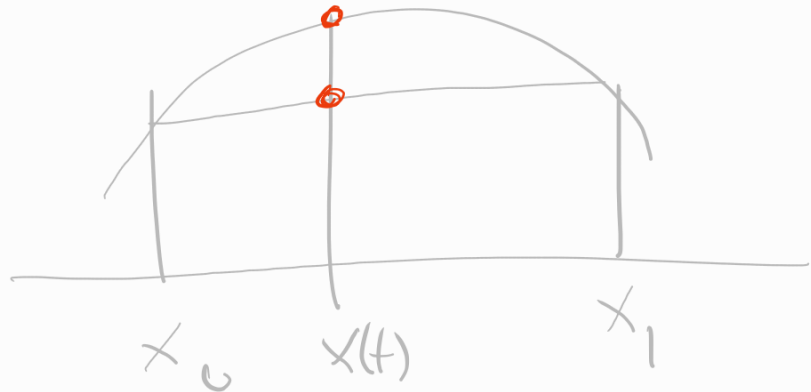
$$f(\underbrace{tx_1 + (1-t)x_0}_{x(t)}) \leq \underbrace{tf(x_1) + (1-t)f(x_0)}_{\text{linea}} \quad \leftarrow$$



f si dice CONCAVA $\stackrel{\text{def}}{\iff} (-f \text{ convessa})$

$$\forall x_0, x_1 \in I$$
$$\forall t \in [0, 1]$$

$$f(t x_1 + (1-t) x_0) \geq t f(x_1) + (1-t) f(x_0)$$

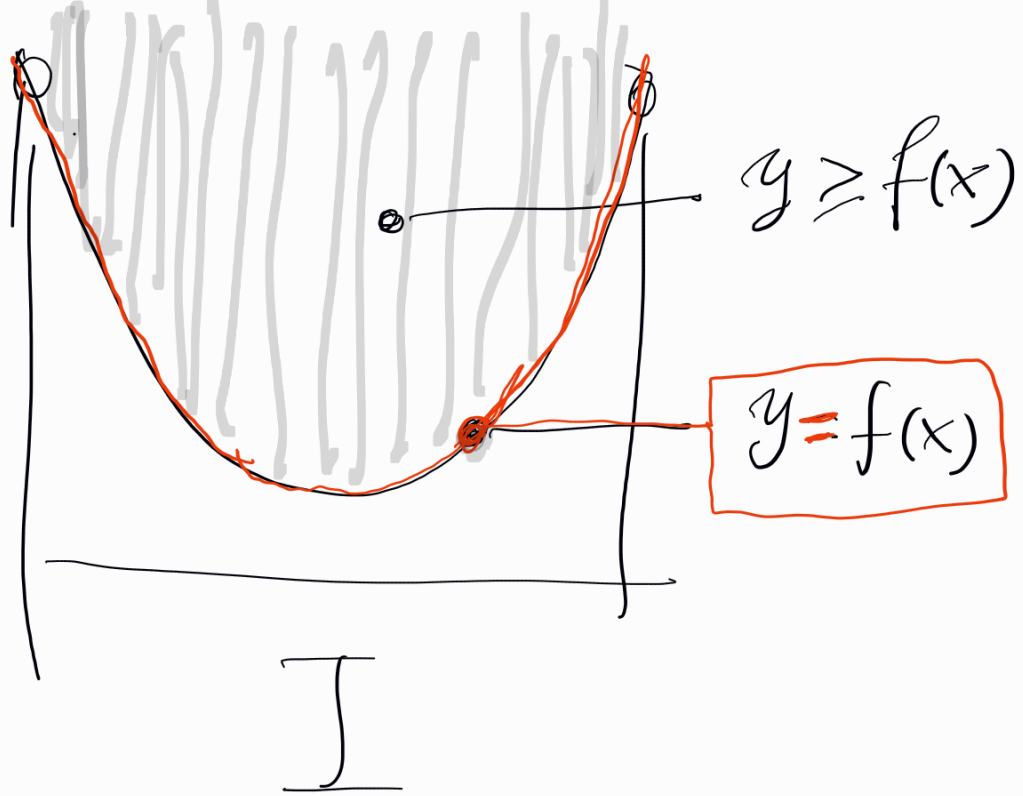


Prop: se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, sono equivalenti

(i) f convessa

(ii) $\text{epi}(f) := \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\} \subseteq I \times \mathbb{R}$

è un insieme convesso



Dim : $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$

$$p_0 = (x_0, y_0) \in \text{epi}(f) \Rightarrow f(x_0) \leq y_0$$

$$p_1 = (x_1, y_1) \in \text{epi}(f) \Rightarrow f(x_1) \leq y_1$$

$$t p_1 + (1-t) p_0 = \left(\underbrace{t x_1 + (1-t) x_0}_{x(t)}, t y_1 + (1-t) y_0 \right)$$

$$f(x(t)) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_0) \leq t y_1 + (1-t) y_0 \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow (x(t), t y_1 + (1-t) y_0) \in \text{epi}(f)$$

$$(ii) \Rightarrow (i)$$

$$x_0, x_1 \in I$$

$$(x_i, f(x_i)) \in \text{epi}(f)$$

$$\lambda = 0, 1$$

$$\Rightarrow \forall t \in [0, 1] \quad (tx_1 + (1-t)x_0, tf(x_1) + (1-t)f(x_0)) \in \text{epi}(f)$$

cioè

$$f(tx_1 + (1-t)x_0) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_0) \quad \forall t \in [0, 1]$$

ovvero: f convessa

Prop:

$$S \quad f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$$

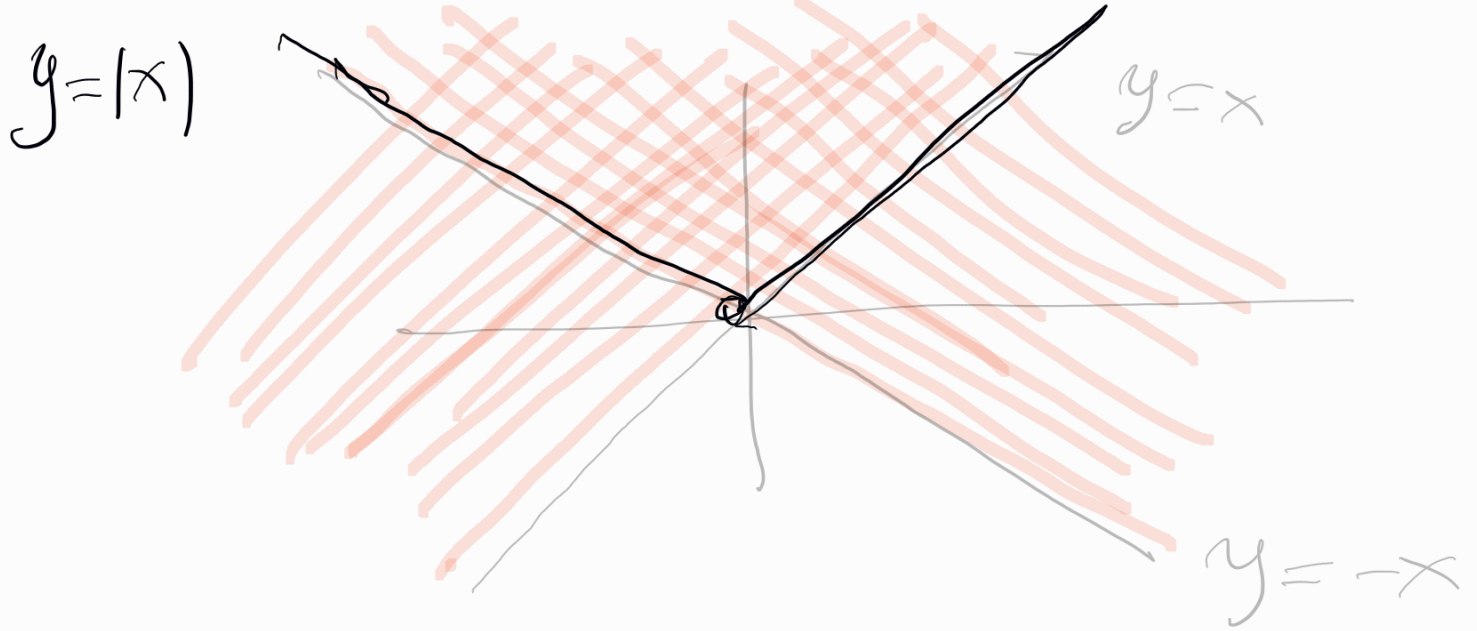
funzioni convesse

$$\Rightarrow f(x) := \max \{f_1(x), f_2(x)\}$$

f è convessa

Esempio: $|x| := \max \{x, -x\}$

è una funzione convessa



Dim: $(x, y) \in \text{epi}(f) \Leftrightarrow$

$$y \geq f(x) \doteq \max\{f_1(x), f_2(x)\}$$

$$\Leftrightarrow y \geq f_1(x) \wedge y \geq f_2(x)$$

$$\Leftrightarrow y \in \text{epi}(f_1) \cap \text{epi}(f_2)$$

$$\text{epi}(f) = \boxed{\text{epi}(f_1) \cap \text{epi}(f_2)}$$

ma intersezione di due convessi

è convessa!

f_1, f_2 convesse $\Rightarrow \text{epi}(f_1)$ insiemi convessi $\Rightarrow \text{epi}(f)$ convesso

$\Downarrow$
 f convessa

Prop': se $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ famiglia di funzioni
convesse

$f(x) \doteq \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha(x)$ è una funzione convessa
(dove è finita)

(Dim identica a quella precedente)

RELAZIONE TRA CONVESSITÀ e RAPPORTI INCREM.

Prop: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ funzione convessa.

$x_0, x_1 \in I$ con $x_0 < x_1$
 $t \in [0, 1]$

$x(t) = t x_1 + (1-t)x_0$
($x(0) = x_0$ $x(1) = x_1$)

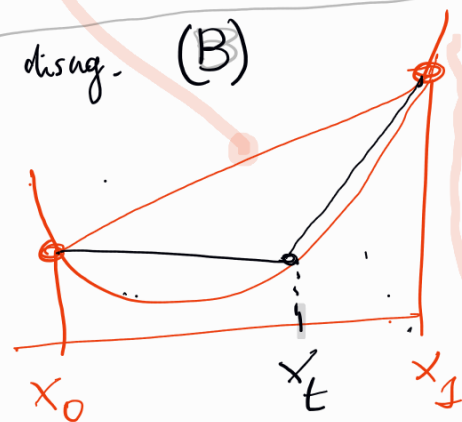
Allora

$$\frac{f(x_t) - f(x_0)}{x_t - x_0} \leq \boxed{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}} \leq \frac{f(x_1) - f(x_t)}{x_1 - x_t}$$

disuguaglianza (C)

disug. (A)

disug. (B)



Viceversa, se vale la disug

(A) per ogni $x_0, x_1 \in I$
 $x_0 < x_1$
 $t \in [0, 1]$ $\Rightarrow f$ convessa

(B) per ogni $x_0, x_1 \in I$
 $x_0 < x_1$
 $t \in [0, 1]$ $\Rightarrow f$ convessa

(C) per ogni $x_0, x_1 \in I$ ($x_0 < x_1$) $\Rightarrow f$ convessa
 $t \in (0, 1)$

Dim $(\Rightarrow)$ f convessa.
 $x(t) \rightsquigarrow x_t$

$$f(x_t) - f(x_0) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_0) - f(x_0)$$

$$f(x_t) - f(x_0) \leq t (f(x_1) - f(x_0))$$

$$x_t - x_0 = t x_1 + (1-t) x_0 - x_0$$

$$x_t - x_0 = t (x_1 - x_0) \quad \leftarrow \text{some quant. pos}$$

$$\frac{f(x_t) - f(x_0)}{x_t - x_0} \leq \frac{\cancel{t} (f(x_1) - f(x_0))}{\cancel{t} (x_1 - x_0)}$$

ho mostrato la disug (A)

Per dim (B)

$$f(x_1) - f(x_t) \geq (1-t) (f(x_1) - f(x_0))$$

$$x_1 - x_t = (1-t) (x_1 - x_0)$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_t)}{x_1 - x_t} \geq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$(A) \wedge (B) \Rightarrow (C)$$

Le implicazioni inverse sono ovvie
se vale (A)

Si vede facilmente che, se $\forall x_0 < x_1$
 $\forall t \in [0,1]$

vale
$$\frac{f(x_t) - f(x_0)}{x_t - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

allora f convessa

(ripercorrere a
ritroso i passaggi
visti sopra)

(B) $\Rightarrow$ convessità (dim come in (A))

(C) $\Rightarrow$ (A) & (B)



$$\frac{f(x_t) - f(x_0)}{x_t - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_t)}{x_1 - x_t}$$

m_0

$\leq$

m_1

$$\underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_m = \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_t)}{x_1 - x_t}}_{m_1} \underbrace{\frac{x_1 - x_t}{x_1 - x_0}}_{\lambda} + \underbrace{\frac{f(x_t) - f(x_0)}{x_t - x_0}}_{m_0} \underbrace{\frac{x_t - x_0}{x_1 - x_0}}_{\mu}$$

$$\lambda, \mu \geq 0 \quad \lambda + \mu = 1$$

$$m = m_1 \lambda + m_0 \mu$$

$$m \leq m_1 \lambda + m_1 \mu = m_1 \Rightarrow (B)$$

$$m \geq m_0 \lambda + m_0 \mu = m_0 \Rightarrow (A)$$

se vale (C) $\Rightarrow$ Valgono anche $\Rightarrow f$ convessa
 $\forall x_0 < x_1$
 $\forall t \in [0, 1]$
 A & B

COROLLARIO Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$; $R(x, y) \doteq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$

Le seguenti condizioni sono equivalenti

(*) f convessa

(A) $\forall x, y, z \in I \quad x < y < z$

$$R(x, y) \leq R(x, z)$$

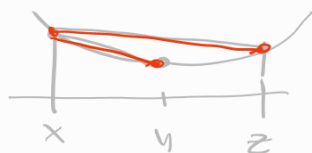
$$R(x, z) \leq R(y, z)$$

(B) $\parallel \parallel \parallel$

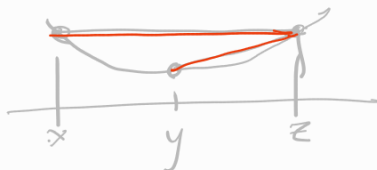
(C) $\parallel \parallel \parallel$

$$R(x, y) \leq R(y, z)$$

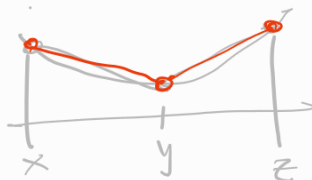
(A)



(B)



(C)



Dim: Segue immediatamente dalla
proposizione precedente
prendendo $x_0 = x$ $x_1 = z$

e $x_t = y$ $t = \frac{y - x}{z - x} \in [0, 1]$

COROLLARIO: Se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è

convessa allora

$$R(x, y) \doteq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

è una funzione crescente

sia in x che in y

Dim: $R(x, y) = R(y, x)$

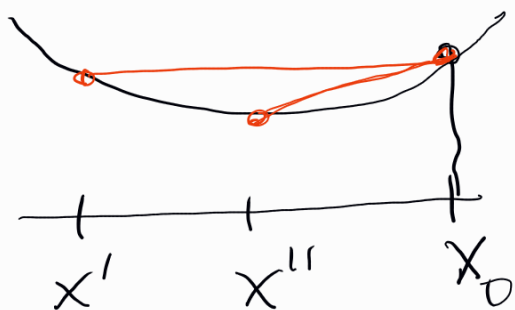
Quindi basta verificare la
crescente nella seconda variabile, cioè basta verificare
che $\forall x_0$ fissato

$x \mapsto R(x_0, x)$ è crescente

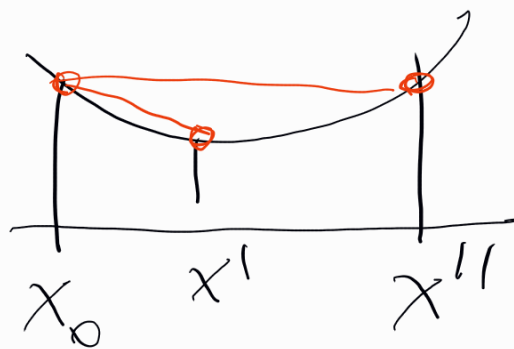
$\forall x', x'' \in I$ se $x' < x'' \Rightarrow$

$$R(x_0, x') \leq R(x_0, x'')$$

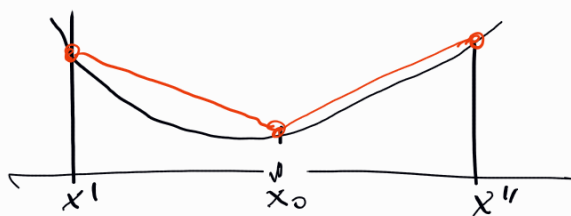
Questa disuguaglianza è conseguenza di
(A), (B) o (C) (la seconda dei casi) del corollario appena
visto.



(B)



(A)



(C)



PROP : $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ convessa

Allora f ammette derivata destra e sinistra
in tutti i punti nel senso che :

i) $\forall x_0 \in (a, b)$ $D^+ f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$D^- f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

↑ Questi limiti esistono!

ii) $x_0 < x_1$

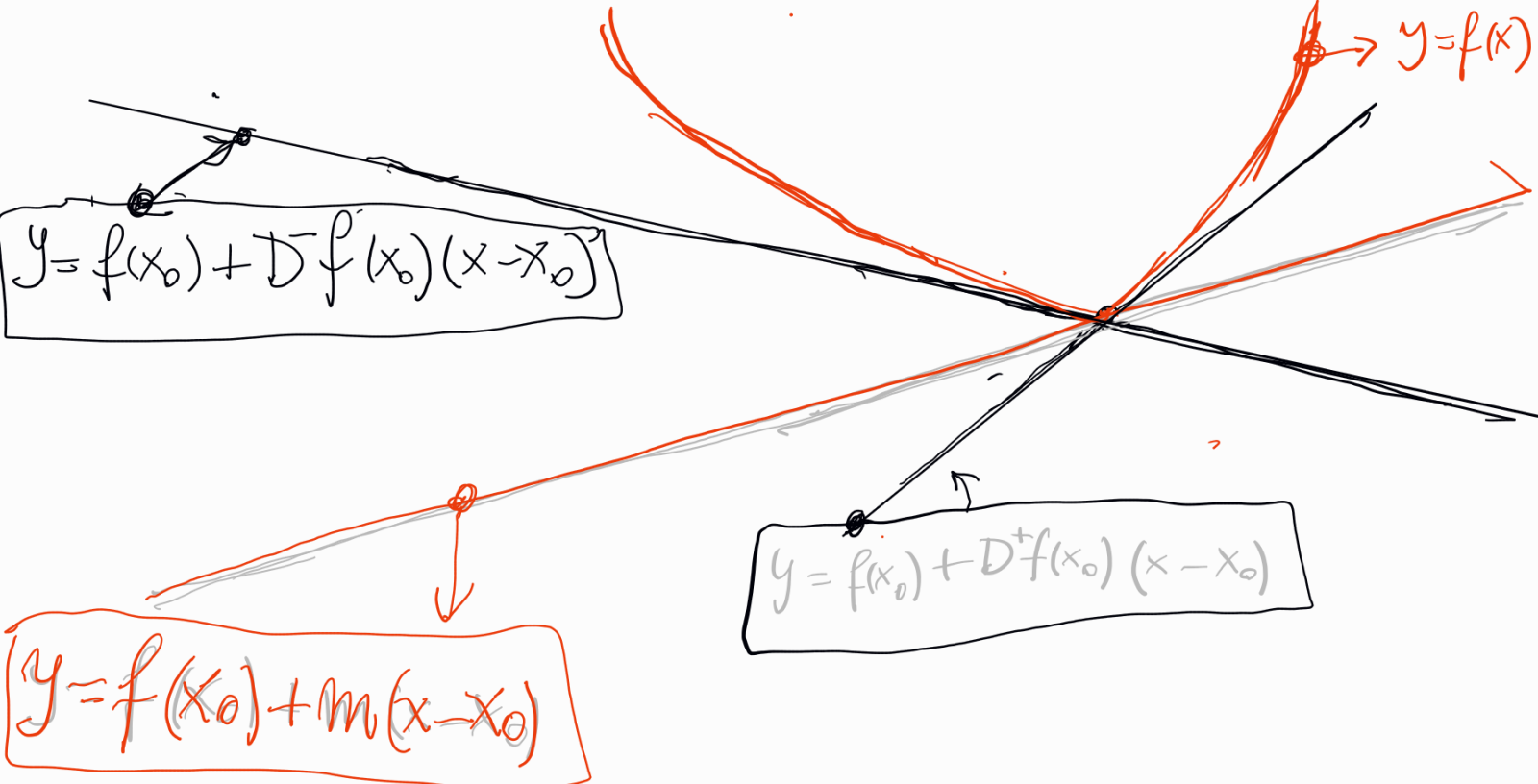
$$D^- f(x_0) \leq D^+ f(x_0) \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq D^- f(x_1) \leq D^+ f(x_1)$$

iii) $m \in [D^- f(x_0), D^+ f(x_0)]$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0)$$

$$\forall x \in I$$

↑ retta di appoggio per f



Dim: $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

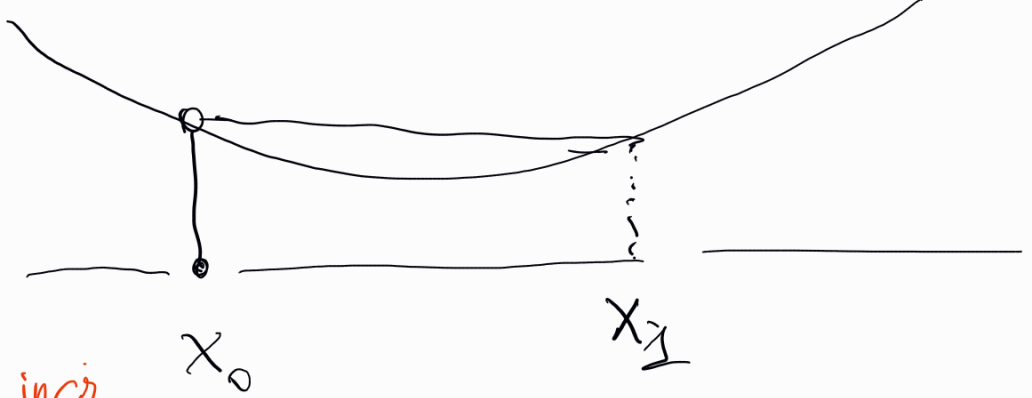
è crescente

$$D^+f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \inf_{x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$D^-f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sup_{x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Qualunque rapporto increm. sinistro è più piccolo di qualunque rapp. incr. destro

(C) $\Rightarrow D^-f(x_0) \leq D^+f(x_0)$



È un rapporto incrementale destro per x_0 ...

$$D^+ f(x_0) \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq D^- f(x_1)$$

ma è anche un rapporto incrementale sinistro per x_1

~~(i)~~ (ii)

se $m \in [D^- f(x_0), D^+ f(x_0)]$

se $x > x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq D^+ f(x_0) \geq m$$

$$f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0)$$

se $x < x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq D^- f(x_0) \leq m$$

$$f(x) - f(x_0) \geq m(x - x_0)$$

$$f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0)$$

COR: $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ Convex
 $\Rightarrow f$ è continua

Dim: Basta vedere che f
 è continua su ogni
 intervallo $[a', b'] \subset (a, b)$

se $x < x' \in [a', b'] \subset (a, b)$

$$D^- f(a') \leq D^- f(x) \leq \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \leq D^+ f(x') \leq D^+ f(b')$$

$$|f(x) - f(x')| \leq M |x - x'|$$

$$M = \max \{ |D^- f(a)|, |D^+ f(b)| \}$$

COR: Se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile
allora sono equivalenti

- (i) f convessa
- (ii) f' crescente

Dim ($\Rightarrow$)

f convessa & derivabile

$$\Rightarrow f'(x) = D^+ f(x) = D^- f(x)$$

↑

$D^+ f$ sono crescenti
 $\Rightarrow f'$ è crescente

~~$[a, b]$~~ Se $x, y, z \in I$
 $x < y < z$

allora

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c_1) \quad \text{con } c_1 \in (x, y)$$

$$\frac{f(z) - f(y)}{z - y} = f'(c_2) \quad \text{con } c_2 \in (y, z)$$

f' monotona crescente $\Rightarrow f'(c_1) < f'(c_2)$

$$\Rightarrow \frac{f(z) - f(y)}{z - y} > \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad (c)$$

COROLLARIO *
(C)



f convessa

Esercizio: verificare che
 $f(x) = -x \log x$ è convessa
su $(0, +\infty)$
