

5 dic 2025 - Lezione 33

MASSIMI E MINIMI DI FUNZ

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad A \subseteq \mathbb{R}$$

Def: x_0 è punto di MASSIMO (MINIMO) ASSOLUTO o GLOBALE per f $\Leftrightarrow$

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in A$$

$f(x_0)$ si dice VALORE DI MASSIMO per f su A

$$(f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A)$$

e $f(x_0)$ si dice VALORE DI MINIMO per f su A

x_0 è punto di MASSIMO (MINIMO) RELATIVO o LOCALE per f

$\Leftrightarrow \exists U$ intorno di x_0 tale che

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in A \cap U$$

$$(f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A \cap U)$$

TEOREMA WEIERSTRASS: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Allora f ammette massimo e minimo globale su $[a, b]$. In particolare f è LIMITATA

OSS 1: Se f non fosse continua
il teorema potrebbe non valere
 $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

OSS 2: Il teorema può fallire se
 f def su (a, b) (ma non agli estremi)
 $f(x) = \tan x$ su $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
non ha max e min
(non è nemmeno limitata)

LEMMA: Se $f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad (A \neq \emptyset)$

Allora $\exists (u_n)_n (v_n)_n$ successioni a
valori in A

tali che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \sup_{x \in A} f(x) = m^*$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = \inf_{x \in A} f(x)$

Dim: Dimostrare l'esistenza di u_n
LEMMA
 $\forall n \in \mathbb{N}$

$\gamma_n \doteq \begin{cases} n & \text{se } m^* = +\infty \\ m^* - \frac{1}{n} & \text{se } m^* \in \mathbb{R} \end{cases}$

Con questa definizione
si ha che:
$$\begin{cases} \gamma_n < m^* & \forall n \\ \gamma_n \rightarrow m^* & \text{per } n \rightarrow \infty \end{cases}$$

cioè $\forall n$ γ_n non è un maggiorante
per $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists u_n \in A : f(u_n) > \gamma_n$

$$\gamma_n < f(u_n) \leq m^*$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ m^* & \leq & m^* < m^* \end{array}$$

per il
teorema
dei 2
Carabinieri

Per la m_n si procede
allo stesso modo



**DIM
WEIERSTRASS**

Dimostro l'esist. del
massimo

Scelgo (u_n) come sopra cioè
 $a \leq u_n \leq b$ con $f(u_n) \rightarrow \sup_{x \in [a,b]} f(x)$

$\downarrow$
 u_n limitata $\Rightarrow \exists n_k \nearrow \infty$ f.c.

$$u_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u^*$$

$$u^* \in [a, b]$$

teorema di
permanenza del
segno

$$f(u_{n_k}) \longrightarrow f(u^*)$$

perché f
continua

$$f(u_{n_k}) \longrightarrow m^*$$

perché $f(u_{n_k})$
sottosucc $f(u_n)$
ha lo stesso limite

$$m^* = f(u^*)$$

per unicità
del limite

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

f ammette massimo

Oss: Il teorema vale

perché $f: C \longrightarrow \mathbb{R}$

C

LIMITATO
e CHIUSO

$$C \subseteq \mathbb{R}$$

$$C \subseteq \mathbb{C}$$

C^1 CHIUSO $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\forall (u_n)_n \subset C$$

$$\text{con } u_n \rightarrow u^*$$

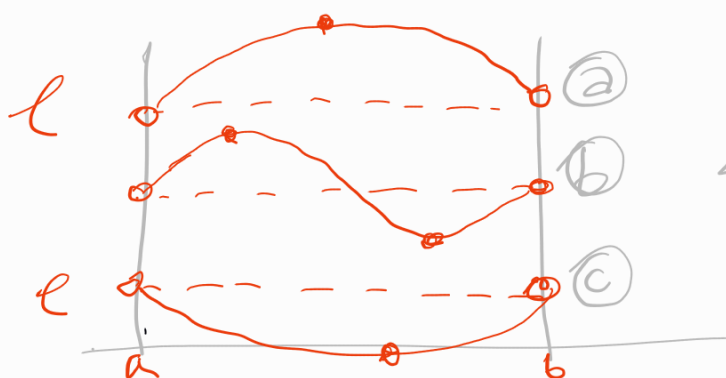
$$\Rightarrow u^* \in C$$

COR [WEIERSTRASS GENERALIZZATO]

Se $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora f ammette massimo
o
minimo
su (a, b)



Possibili
esististiche:

(a) esiste solo un
massimo su (a, b)

(b) esiste sia max che
min su (a, b)

(c) esiste solo minimo
su (a, b)

Oss: il corollario è particolarmente
interessante se $l = \pm \infty$

$l = +\infty$ f ammette minimo



Dim:

(caso 0) $f(x) \equiv l$

tutti i punti sono
di min/max

(caso 1) $f(x) \neq l \Rightarrow \exists x_0 \in (a, b)$

t.c. $f(x_0) \neq l$

~~Supponiamo~~ Supponiamo che: $f(x_0) > l$

Allora f ammette massimo
infatti...

$$U = (-\infty, f(x_0))$$

$$l \in U$$

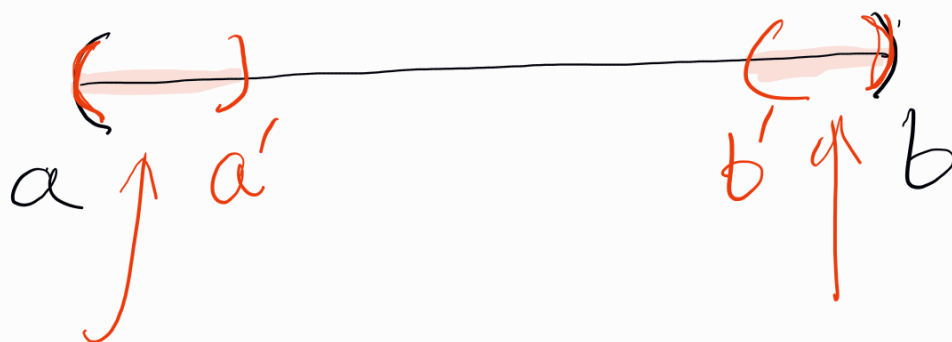
intorno
aperto di l

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l \Rightarrow \exists a' > a : f(x) \in U \quad \forall x \in (a, a')$$

$$\text{cioé } f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (a, a')$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = l \Rightarrow \exists b' < b : f(x) \in U \quad \forall x \in (b', b)$$

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (b', b)$$



f continua su $[a', b']$

$\Rightarrow \exists x_1 : f(x_1) \geq f(x) \quad \forall x \in [a', b']$

$x_0 \in [a', b'] \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_0)$

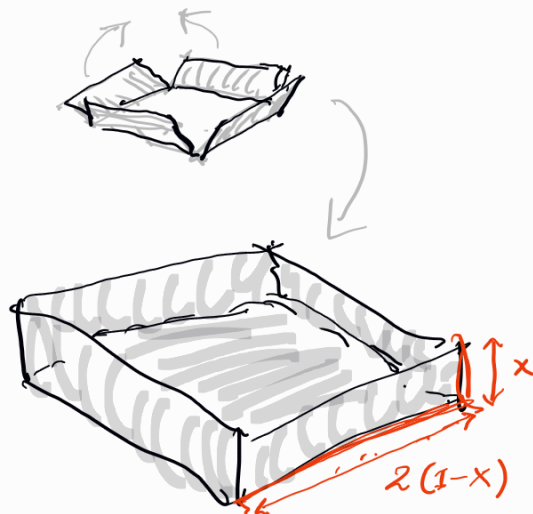
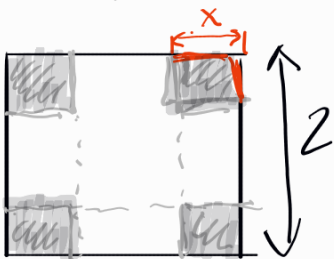
E quindi $f(x_1) \geq f(x) \quad \forall x \in (a, b)$

x_1 è max globale su (a, b)

Se invece fosse $f(x_0) < l$, con un ragionamento analogo si mostra che f ammette minimo su (a, b)

PROBLEMA (DI OTTIMIZZAZIONE)

Foglio di latta,
lato lungo 2 unità
Voglio costruire una scatola
(senza coperchio) tagliando via
4 quadrati agli angoli,
e ripiegando le alette
che si formano

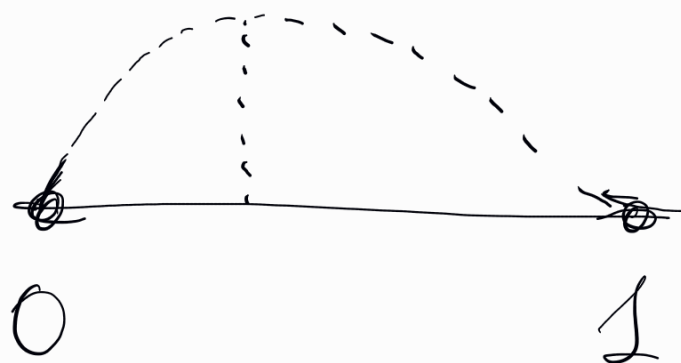


Vogli scatola di
volume massimo

PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE

$$\frac{V}{4} \equiv x(1-x)^2 = x(1-2x+x^2) \\ = x - 2x^2 + x^3$$

$$0 \leq x \leq 1$$



RELAZIONE TRA
MASSIMI/MINIMI E
DERIVATE

TEOREMA DI FERMAT

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in (a, b)

$x_0 \in (a, b)$ punto di max o min

allora $f'(x_0) = 0$

OSS: In realtà basta x_0 sia

minimo locale in un
suo intorno bilatero

Dim: SPG x_0 punto di minimo
 $\Delta_f(x, x_0) \doteq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0)$

$$f(x) - f(x_0) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

$$\text{se } x > x_0 \quad x - x_0 > 0$$

$$\Delta_f(x, x_0) \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \Delta_f(x, x_0) \geq 0$$

$$\text{se } x < x_0 \quad x - x_0 < 0$$

$$\Delta_f(x, x_0) \leq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \Delta_f(x, x_0) \leq 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \Delta f(x, x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \Delta f(x, x_0)$$

$$f'(x_0) \geq 0$$

$$\& \quad f'(x_0) \leq 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$



① I massimi/minimi
che trovate con Weierstrass
potrebbero non essere
interni (cioè potrebbero non avere un
intorno bilatero)

$$f(x) = x$$

ha max. & min
su $[0, 1]$

$$\text{ma } f'(x) \equiv 1 \neq 0$$

$\forall x$

② Può succedere che

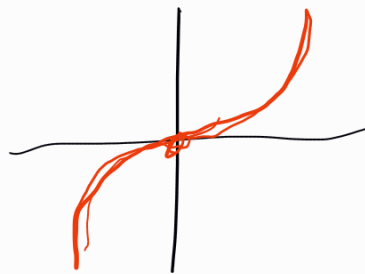
$$f'(x_0) = 0 \quad \text{ma } x_0$$

né di max né di min
(numero locale)

$$f(x) = x^3$$

$$f'(0) = 0$$

ma f è strett. crescente



$$f(x) = x(1-x)^2$$

funzione
del problema
di ottimizzaz.
visto prima

$$= x - 2x^2 + x^3$$

Cerco $\max_{x \in [0,1]} f(x)$

$$f'(x) = 1 - 4x + 3x^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_{\pm} = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{3}$$

$$x_+ = 1$$

$$x_- = 1/3$$

$$f(1) = 0$$

$$f(1/3) > 0$$

f ha max & min su $[0, 1]$
(per Weierstrass)

Tali punti di max & min o cadono agli estremi, o sono punti critici interni a $(0, 1)$, quindi cadono nell'insieme $\{0, 1/3, 1\}$

$$f(0) = f(1) = 0$$

$$f(1/3) > 0$$

Questi sono minimi, dato che $f(x) \geq 0$ se $x \in (0, 1)$

$x_0 = 1/3$ è punto di massimo per f su $[0, 1]$

e $f(1/3) = \frac{4}{27}$ valore di massimo

Def: I punti in cui

la derivata si annulla

si chiamano

punti CRITICI o (STAZIONARI)

CRESCENZA/DECRESC.

VS DERIVATA

Oss: Se f derivabile su (a, b)
Se f crescente su (a, b)

$$\Delta_f(x, x_0) \geq 0$$

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

se f decrescente $\Rightarrow f' \leq 0$

Vale il viceversa? cioè:

$f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ crescente} \\ \forall x \in D(f)$$

No (non vale, senza ult. ipotesi)

$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

$$f(-1) = 1$$

$$f(1) = -1$$

f non è crescente

————— 0 —————

TEOR di ROLLE

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

f derivabile su (a, b)

$$f(a) = f(b) = l$$

$$\Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

Dim: (caso 0) $f(x) = l$...
 $\forall x \in [a, b]$

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

e la tesi è verificata

(caso 1) $\exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) \neq l$

spg $f(x_0) > l$

WEIERSTRASS

$\Rightarrow f$ ammette massimo su $[a, b]$

$$\exists x_1 \in [a, b] : f(x_1) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$f(x_1) \geq f(x_0) > l$$

$$x_1 \notin \{a, b\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \in (a, b) \\ x_1 \text{ punti di max} \end{array} \right.$$

$$f'(x_1) = 0$$

$$(c = x_1)$$

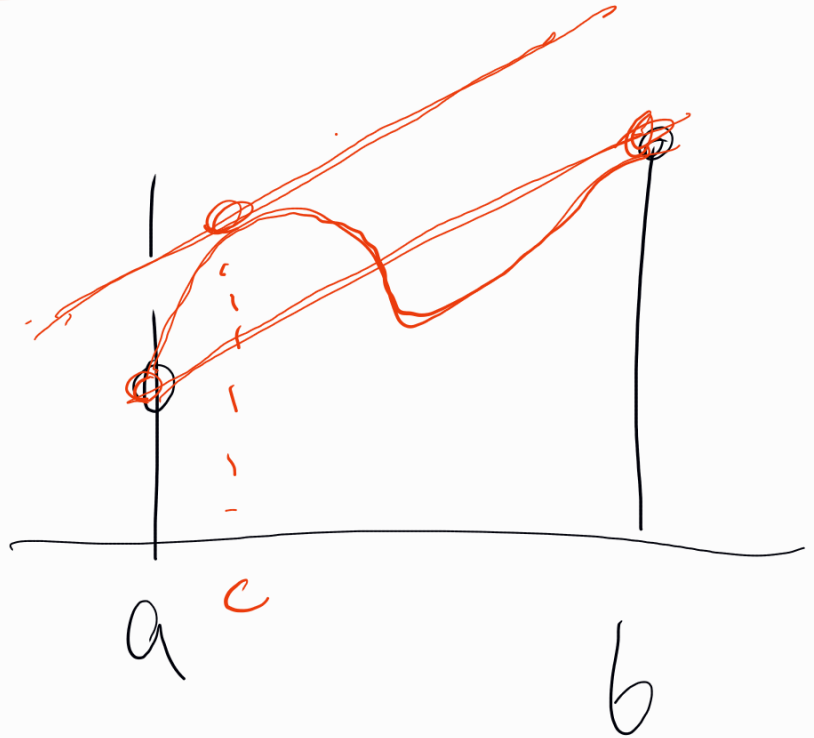
TEOREMA DI
LAGRANGE

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

f derivabile su (a, b)

Allora $\exists c \in (a, b) \text{ t.c.}$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \stackrel{m}{=}$$



Dim: $h(x) := f(x) - m(x-a)$

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

h soddisfa le ipotesi
di Rolle continua su $[a, b]$

derivable su (a, b)

$$h(a) = f(a)$$

$$h(b) = f(b) - m(b-a)$$

$$= f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$$

Rollé $\Rightarrow \exists c \in (a, b) : h'(c) = 0$

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



TEOREMA

Se $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile,
allora

- (i₊) f crescente $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$
- (i₋) f decrescente $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$
- (ii) f costante $\Leftrightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

Dim (i₊) ($\Rightarrow$)

$a, b \in (\alpha, \beta), \quad a < b \Rightarrow \exists c \in (a, b) \subset (\alpha, \beta) \quad \text{t.c.}$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (b - a > 0)$$

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c) \geq 0$$

$$f(b) \geq f(a)$$

(i₋) si dimostra nella stessa
maniera

(ii) $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow$
 $f'(x) \leq 0 \rightarrow f$ dec.
 $f'(x) \geq 0 \rightarrow f$ cresc.

$\Rightarrow f$ costante

ES: Verificare che
 $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ strettam. crescente

(ma non vale in generale
il viceversa p.es $f(x) = x^3$)

Es per casa: Studiare la funzione
 $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$
sul suo dominio