ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 27 – 1. 12. 2025

Serie di Fourier

$\mathcal{H}(0,2\pi) = \{ f : (0,2\pi) :$ funzioni u con u^2 integrabile in senso improprio $\}$

$$H(0,2\pi) = \mathcal{H}(0,2\pi)/\sim \qquad u \sim v \text{ se } \int |u-v|^2 = 0.$$

$$e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad \left.\begin{aligned} e_{2k-1}(x) &= \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \\ e_{2k}(x) &= \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}\right\} k = 1, 2, \dots$$

$e_0, e_1, e_2, e_3, \dots$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos kx \, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 kx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 kx \, dx = \frac{1}{2}$$

$\hookrightarrow \|e_k\| = 1 \leftarrow$ (sono normali)

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{norma}}}{\|u\|} = \|u\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

$$\langle u, v \rangle = \int_0^{2\pi} u(x) \cdot v(x) \, dx.$$

$\llcorner$ prodotto scalare

$\langle e_k, e_j \rangle = 0$ se $k \neq j$ (sono ortogonali)

Es $u = \sin kx \qquad v = \cos jx \overset{?}{\Rightarrow} \langle u, v \rangle = 0$

WERNER

$$\sin kx \cdot \cos jx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \cdot \frac{e^{ijx} + e^{-ijx}}{2}$$

$$= \frac{e^{i(k+j)x} - e^{-i(k+j)x} + e^{i(k-j)x} - e^{-i(k-j)x}}{4i}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin(k+j)x + \sin(k-j)x \right]$$

ma $\int \sin(k+j)x = 0$

$\int \sin(k-j)x = 0$

EULERO

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$\begin{cases} \cos x = \mathrm{Re}\, e^{ix} \\ \sin x = \mathrm{Im}\, e^{ix} \end{cases}$

$\mathrm{Re}\, z = \frac{z + \bar{z}}{2}$

$\mathrm{Im}\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} u \cdot v = 0$$

---

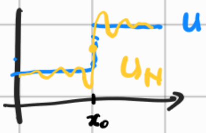
e_k è un sistema ortonormale.

<u>Teo</u> e_k è una base Hilbertiana cioè $u \in H(0,2\pi)$ posto $c_k = \langle u, e_k \rangle$ tali che

$$u = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \cdot u_k = \overset{\text{in } H}{\lim_{N \to +\infty}} \underbrace{\boxed{\sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot u_k}}_{u_N}$$

[<u>Oss</u> non è detto che $u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \cdot u_k(x)$

esempio :



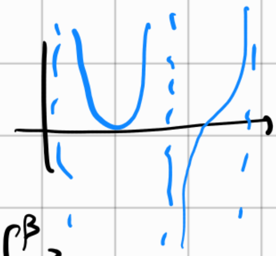
e neanche che $u_N \rightrightarrows u$.]

<u>dim</u> $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ t.c. $\|u_N - u\|_2 < \varepsilon$.

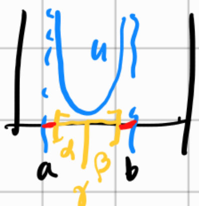
$$u_N = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e_k \qquad c_k = \langle u, e_k \rangle$$

① Data u con u^2 integrabile in senso improprio

esiste $v \in C^0$ t.c. $\|u - v\| < \varepsilon$.



② posso staccarmi dagli asintoti

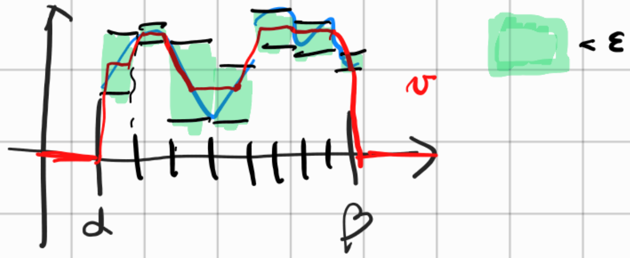


$$\int_a^b u^2 = \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^\gamma u^2 + \lim_{\beta \to b^-} \int_\gamma^\beta u^2$$

$$\left| \int_a^b u^2 - \int_\alpha^\beta u^2 \right| < \frac{\varepsilon}{1000}$$

Su $[\alpha,\beta]$

u^2



Se prendo u^2 continua (ad esempio lineare a tratti) con grafico contenuto nei rettangoli allora $\int u^2 - \int v^2 = \int (u-v)(u+v)$

$\le M\int|u-v| \le M\cdot\varepsilon$

② Stone Weierstraß

polinomi trigonometrici

$$\mathcal{A} = \{ P(\cos t, \sin t) : P \in \mathbb{R}[x,y] \text{ polinomio in 2 variabili} \}$$

- $\mathcal{A}$ è un'algebra: $P(\cos t,\sin t) \overset{(\times)}{+} Q(\cos t,\sin t)$

$= (P \overset{(\times)}{+} Q)(\cos t, \sin t)$

$$\lambda P(\cos t,\sin t) = (\lambda P)(\cos t,\sin t)$$

- $1\in\mathcal{A}$ perché $1 = 1(\cos t,\sin t)$ $\quad 1\in\mathbb{R}[x,y]$
- $\mathcal{A}$ separa i punti: $x,x'\in[0,2\pi)$

esiste $f\in\mathcal{A}$ tale che $f(x)\neq f(x')$

$$x,x'\in[0,2\pi) \Rightarrow \quad x=x' \iff \begin{cases}\cos x=\cos x'\\ \sin x=\sin x'\end{cases}$$

$\Rightarrow$ $f(x)=\sin x$ oppure $f(x)=\cos x$ assume valori diversi che x e x'.

Significa che $u : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ va pensata

come funzione $u : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ ovvero

$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π - periodica.

$$\left[\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/_{2\pi} \right]$$

Stone weierstraß garantisce che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, w$

t.c. $\| w - u \|_\infty < \varepsilon$

ma $$\| w - u \|_2^2 = \int_0^{2\pi} |w(x) - u(x)|^2 \, dx$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \| w - u \|_\infty^2 \, dx = \| w - u \|_\infty^2 \cdot 2\pi$$

$$\leq 2\pi \, \varepsilon^2$$

$\| w - u \|_2 \leq \sqrt{2\pi}\, \varepsilon$. $\square$

(3) $$\mathcal{A} \overset{?}{=} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} c_k e_k(x) \; : \; \begin{matrix} k = 0, \dots, N-1 \\ c_0, \dots, c_N \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} = \mathcal{B}$$

$$\left. \begin{matrix} \sin 2x = 2 \sin x \cos x \in \mathcal{A} \\ \sin kx \in \mathcal{A} \quad \text{per induzione} \\ \cos kx \in \mathcal{A} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$$

$\square$

Viceversa devo mostrare che anche $\mathcal{B}$ è una algebra (formule di Werner) così $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

AGGIUNTO DOPO!

SPAZIO ℓ^2

$$\ell^2 = \left\{ (x_k)_{k\in\mathbb{N}} : \sum_{k=0}^{+\infty} x_k^2 < +\infty ,\quad x_k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \ \sum x_k^2 < +\infty \right\}$$

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k y_k$$

$$\| \underline{x} \|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} x_k^2}$$

$\|\cdot\|_2$ è una norma su ℓ^2. (come in $\mathbb{R}^n$)

$$\rightarrow H(0,2\pi) \xrightarrow{\varphi} \ell^2 \qquad \varphi \text{ è una isometria.}$$

$$u \longmapsto (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

Def V sp. normato si dice essere uno spazio di Banach se è completo. Se V è euclideo e completo diremo che V è uno spazio di Hilbert.

Teo ℓ^2 è completo cioè le successioni di Cauchy convergono cioè ℓ^2 è uno spazio di Hilbert.

dim Sia $\underline{x}^k$ successione di Cauchy in ℓ^2

$$\underline{x}^k = (x_0^k, x_1^k, \dots, x_n^k, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

cioè $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall k, j > N \quad \| \underline{x}^k - \underline{x}^j \| < \varepsilon$

$$\| \underline{x}^k - \underline{x}^j \| = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left| x_\ell^k - x_\ell^j \right|^2$$

$\Rightarrow \forall \ell \in \mathbb{N}$ $\quad x^k_\ell$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$x^k_\ell \to y_\ell \qquad \underline{y} = (y_0, y_1, \dots y_n \dots)$$

Voglio mostrare che: $\quad \underbrace{\underline{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$

$$\left(\underline{x}^k \to \underline{y} \text{ in } \ell^2 \right)$$

$$\|\underline{x}^k - \underline{y}\| = \lim_{M\to\infty} \sum_{\ell=0}^{M-1} |x^k_\ell - y_\ell|^2$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$ t.c. $k, j > N \quad \|\underline{x}^k - \underline{x}^j\| < \varepsilon$

allora $$\sum_{\ell=0}^{N-1} |x^k_\ell - \underset{\substack{\uparrow \\ x^j_\ell}}{y_\ell}|^2 = \lim_{j\to\infty} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{N-1} |x^k_\ell - x^j_\ell|^2}_{\leq \|\underline{x}^k - \underline{x}^j\|^2}$$

$$\leq \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ t.c. $k > N \quad \|\underline{x}^k - \underline{y}\| < \varepsilon$

$$\boxed{\begin{array}{c} \underline{x}^k \text{ è limitata} \\ \Downarrow \\ \|y\| < +\infty \end{array}}$$

cioè $\quad \underline{x}^k \to \underline{y}$ in ℓ^2 $\square$ $\qquad \square$

Cauchy $\Downarrow$ limitata

$$H(0, 2\pi) \hookrightarrow \ell^2$$

Esercizio ma $H(0, 2\pi]$ non è completo

quindi $H \not\cong \ell^2$?

[Il colpevole è Riemann, il suo integrale non è sufficiente, il problema lo risolve Lebesgue.]

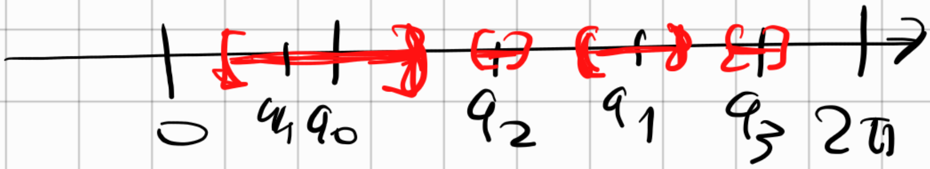
Con l'integrale di Lebesgue $H = L^2 \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} \ell^2$

Hilbert   Lebesgue   (L^p Banach)

<u>Esempio</u> di succ. di Cauchy che non converge in $H(0,2\pi)$. $\{q_k\} = \mathbb{Q}\cap[0,2\pi]$

numerazione dei razionali

$$A_n = \bigcup_{k=0}^{n} \underbrace{\left[q_k - \frac{1}{2^{k+2}},\ q_k + \frac{1}{2^{k+2}}\right]}_{I_k}$$



$$u_n = 1\!\!1_{A_n}, \quad u_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A_n \\ 0 & \text{se } x \notin A_n \end{cases}$$

$$\|u_n - u_m\|^2 = \int_0^{2\pi} |u_n(x) - u_m(x)|^2\,dx = \underbrace{\int_0^{2\pi} |u_n(x) - u_m(x)|\,dx}_{u_n(x) \in \{0,1\} = \{0^2, 1^2\}}$$

$n > m$

$$\le \sum_{k=m+1}^{n} \int_0^{2\pi} 1\!\!1_{I_k} \le \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \le \frac{1}{2^{m+1}} \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow 0$$

u_n è di Cauchy ma si può dimostrare

che non converge in $H(0,2\pi)$ $\square$

(VEDI APPUNTI DI ANALISI UNO)