

ANALISI MATEMATICA 2

LEZIONE 26 - 27.11.2025

Teo Stone-Weierstrass

X sp. metrico compatto

$\mathcal{A} \subseteq C^0(X, \mathbb{R})$ $\mathcal{A}$ algebra che separa i punti e
contiene le costanti

allora

$\mathcal{A}$ è denso in $C^0(X, \mathbb{R})$, ($\overline{\mathcal{A}} = C^0(X, \mathbb{R})$)

Manca:

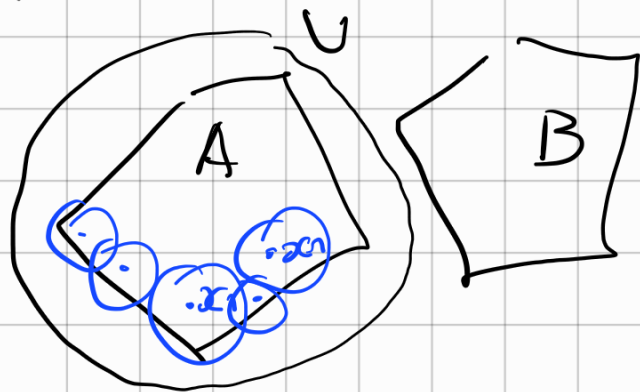
Lemma 2 $A, B \subseteq X$ A, B compatti, $A \cap B = \emptyset$

$\forall \varepsilon > 0 \exists f \in \mathcal{A}$ t.c.

(1) $0 \leq f \leq 1$

(2) $f(x) < \varepsilon \quad \forall x \in A$

(3) $f(x) > 1 - \varepsilon \quad \forall x \in B$.



dim Sia $U \supseteq A$ aperto $U \cap B = \emptyset$

$\forall x \in A \exists V_x \subseteq U$ intorno aperto di x come nel lemma 1.

V_x è un ricoprimento aperto del compatto A

$\exists x_1, \dots, x_m \in A$ t.c. $V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_m} \supseteq A$

$\exists g_1, \dots, g_m \in \mathcal{A} \quad 0 \leq g_k \leq 1, \quad g_i < \frac{\varepsilon}{m} \text{ su } V_{x_i}$

$g_i > 1 - \frac{\varepsilon}{m} \text{ su } X \setminus U$

$$g = g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_m \quad (2) \quad \forall x \in A \quad \exists x_i \text{ t.c. } x \in V_{x_i}$$

$$0 \leq g \leq 1 \quad (1)$$

$$g_i(x) < \frac{\varepsilon}{m}$$

$$\Downarrow$$

$$g(x) < \frac{\varepsilon}{m}$$

$$(3) \quad \forall x \in B \quad x \notin \bigcup V_{x_i}$$

$$\forall_i \quad g_i(x) > 1 - \frac{\varepsilon}{m}$$

$$g > \left(1 - \frac{\varepsilon}{m}\right)^m \geq 1 - m \cdot \frac{\varepsilon}{m} = 1 - \varepsilon \quad \square$$

SPAZIO EUCLIDEO / HILBERT

Si dice che V è uno spazio euclideo se V è uno spazio vettoriale reale ed è definito un prodotto scalare $\langle v, w \rangle$ definito positivo ($v, w \in V$).

Esempio $\mathbb{R}^n \quad \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \cdot y_k$$

Ma V potrebbe avere dimensione infinita.

Def (insieme indipendente) $B \subseteq V$ si dice un insieme indipendente di vettori se

dati $v_1 \dots v_N \in B$ dati $\lambda_1 \dots \lambda_N \in \mathbb{R}$

$$\text{se } \sum_{k=1}^N \lambda_k v_k = 0 \Rightarrow \lambda_k = 0 \quad \forall k$$

Basi di Hamel $B \subseteq V$ insieme indipendente
si dice essere una Basi di Hamel se

$$\forall v \in V \quad \exists N \quad \exists v_1 \dots v_N \in B \quad \exists \lambda_1 \dots \lambda_N \in \mathbb{R}$$

$$\text{t.c. } v = \sum_{k=1}^N \lambda_k v_k$$

Es $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} : x_k \in \mathbb{R}\}$

$$= \{\text{successioni di numeri reali}\}$$

Quanto deve essere grosso $B \subseteq V$ per essere
una base di Hamel?

$$\left\{ \begin{array}{l} e_0 = (1, 0, 0, 0, \dots) \\ e_1 = (0, 1, 0, 0, \dots) \\ \vdots \\ e_n = (0, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots) \\ \vdots \end{array} \right.$$

non bastano! mi servono $e_x = \mathbb{1}_x \quad x \subseteq \mathbb{N}$
cognito.

Def Se V è euclideo V è uno spzto normato
 $\Rightarrow$ spzto metrico

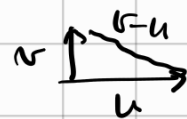
$$d(u, v) = \|u - v\| \quad \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

$$u_k \rightarrow u \text{ se } d(u_k, u) \rightarrow 0.$$

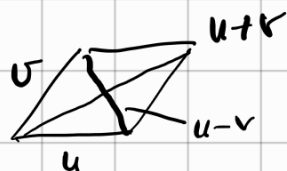
}

Proprietà degli spaz. euclidei.

1. $|v+w|^2 = |v|^2 + 2\langle v, w \rangle + |w|^2$ (quadrato del binomio)
2. $\langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow |v-u|^2 = |v|^2 + |u|^2$ (Pitagora)
3. $\langle u, v \rangle \leq \frac{|u|^2 + |v|^2}{2}$ (Young)
4. $\langle u, v \rangle \leq |u| \cdot |v|$ (Cauchy-Schwarz)
5. $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$
(regola del parallelogramma)



GIA' visto



Teo Una norma è euclidea (cioè deriva da un prodotto scalare) se e solo se vale 5.

$$6. \quad u_k \rightarrow u \quad \text{e} \quad v_k \rightarrow v \quad \langle u_k, v_k \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle. \\ \text{(continuità).}$$

Def V sp. euclideo $B \subseteq V$ si dice un insieme ortogonale se $\forall u, v \in B$ si ha $|u| = |v| = 1$ ($\langle u, u \rangle = 1, \langle v, v \rangle = 1$) e $\langle u, v \rangle = 0$ se $u \neq v$.

B è ortogonale $\Rightarrow B$ è indipendente
 $u_k \in B$

$$\left(\begin{aligned} v &= \sum_{k=1}^N \lambda_k u_k = 0 \\ \langle v, u_j \rangle &= \sum_{k=1}^N \lambda_k \langle u_k, u_j \rangle \\ &= \lambda_j \Rightarrow \lambda_j = 0 \end{aligned} \right)$$

$B \subseteq V$, B numerabile $B = \{e_0, e_1, \dots, e_n, \dots\}$

B si dice una base Hilbertiana se

$$\forall v \in V \quad \exists \lambda_k \in \mathbb{R} \quad t. \quad v = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k e_k.$$
$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k e_k$$

Se $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è un insieme ortonormale

dato $v \in V$ posso definire le sue coordinate rispetto alla base:

coefficienti di Fourier

$$c_k = \langle v, e_k \rangle \in \mathbb{R}$$

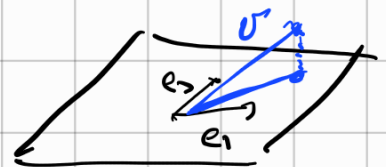
$$v = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k e_k$$

$$\|v\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2$$

Teo se $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è ortonormale allora

vale la disuguaglianza di Bessel:

$$(\neq) \quad \|v\|^2 \geq \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2$$



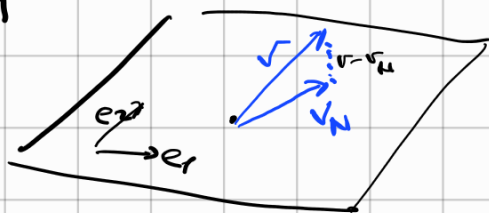
vale $\|v\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2$ e $v = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k e_k$

⇔ e solo se e_k è una base Hilbertiana.

dim $v_N = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e_k$ dove $c_k = \langle v, e_k \rangle$

$\langle v - v_N, e_j \rangle \stackrel{?}{=} 0 \quad \forall j = 0, \dots, N-1$

||



$$\langle v, e_j \rangle = \langle \sum_{k=0}^{N-1} c_k e_k, e_j \rangle$$

$$= c_j - \sum_{k=0}^{N-1} c_k \langle e_k, e_j \rangle = c_j - c_j = 0.$$

$$\|v\|^2 = \|v - v_N\|^2 + \|v_N\|^2 \geq \|v_N\|^2$$

$$\|v_N\|^2 = \langle v_N, v_N \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} c_k e_k, \sum_{j=0}^{N-1} c_j e_j \right\rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} c_k^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2. \quad (\otimes)$$

Se la base è Hilbertiana:

|| $v = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e_k$ ma $c_j = \langle v, e_j \rangle = \langle \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e_k, e_j \rangle = a_j$
 sono i coefficienti di Fourier.

$\|v - v_N\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow$ la base è Hilbertiana. $\square$

SERIE di FOURIER

Sia $\mathcal{H}(a,b) = \left\{ u: (a,b) \rightarrow \mathbb{R} : \begin{array}{l} u \text{ integrabile in senso} \\ \text{improprio su } (a,b) \\ \text{con } \int_a^b u^2 < +\infty \end{array} \right\}$

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x) \cdot v(x) dx \quad \sum x_k \cdot y_k$$

$$\|u\|_2 = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\int_a^b u^2(x) dx}.$$

Si dimostra che $\int_a^b u^2 < +\infty$ e $\int_a^b v^2 < +\infty$ allora

facilmente

$$\int |\lambda u + \mu v|^2 < +\infty \Rightarrow \mathcal{H}(a,b) \text{ è uno sp. vettoriale.}$$

$\langle u, v \rangle$ è bilineare su $\mathcal{H}(a,b)$ ma non

$$\text{che } \|u\| = 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} u = 0.$$

$$\Downarrow \\ \int u^2 = 0 \not\Rightarrow u = 0.$$

$$\mathcal{H}(a,b) = \mathcal{H}(a,b) / \sim \quad u \sim v \text{ se } \int_a^b |u-v| = 0$$

$\mathcal{H}$ è uno spazio euclideo. $(a,b) = (0, 2\pi)$

Si può costruire una base di Hilbert così:

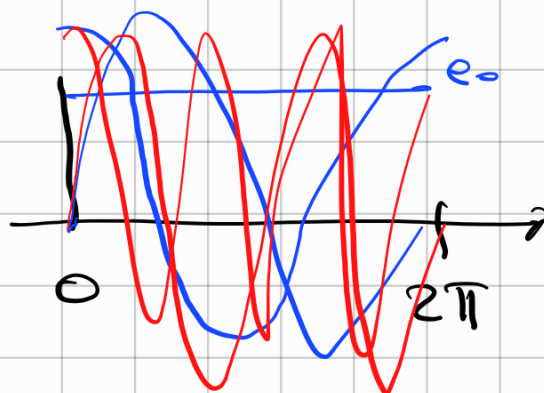
$$e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\|e_0\|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}} = 1$$

$$e_{2k}(x) = \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}$$

$$k = 1, 2, \dots$$

$$e_{2k+1}(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}$$



Si verifica che $e_0, e_1, e_2, \dots$

è ortonormale (è una verifica

$$\left\| \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin kx \cos jx &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \sin jx &= 0 \end{aligned} \right.$$

(usare la formula di Eulero)

[vedi APPUNTI di ANALISI VNO]

$u \in H(0, 2\pi)$

$$c_k = \int_0^{2\pi} u(x) e_k(x) dx =$$

$$\overset{\text{ndispol}}{\int_0^{2\pi}} u(x) \sin \frac{k+1}{2} x$$
$$\int_0^{2\pi} u(x) \cos \frac{k}{2} x$$

$$\begin{aligned} \sin(kx) &= P_k(\cos x, \sin x) \\ \cos(kx) &= Q_k(\cos x, \sin x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ &\vdots \end{aligned}$$

$\uparrow$
 $\mathcal{T}$ = polinomi trigonometrici
soddisfanno le ipotesi di Stone-Weierstraß

$\Downarrow$

$\mathcal{T}$ è densa in $C^0([a, b])$ per la
distanza uniforme

$\Downarrow$

$\mathcal{T}$ è denso in $L^2(a, b)$

$\Downarrow$

e_k è una base Hilbertiana.



$H(a, b)$ non è completo!

$$u \in H(0, 2\pi)$$

$$u = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \cdot e_k$$

$$\|u\|_2^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2$$



il completamento di $H(0, 2\pi)$

è lo spazio di Hilbert H^0

↑
completo

