

ANALISI MATEMATICA 2

LEZIONE 23 - 20.11.2025

Argomenti I compiti:
f di più variabili
NON convergenza uniforme

CONVERGENZA DOMINATA

Teo [convergenza dominata per l'integrale di Riemann]

Se $f_n, f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $a \geq -\infty$, $b \leq +\infty$ f_n continue
e $\forall [\alpha, \beta] \subseteq (a, b)$ si ha $f_n \rightarrow f$ (quindi f è continua)
e se $\exists g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

① $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in (a, b)$
 g continua

② $\int_a^b g(x) dx < +\infty$.

Allora: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

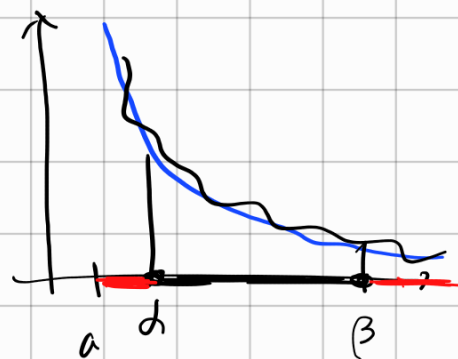
$$\lim \int = \int \lim.$$

⚠ Non è il teorema di Lebesgue perché l'integrale è di Riemann

dim $\int_a^b g$ converge (integrale improprio)

$\forall \varepsilon > 0 \exists [\alpha, \beta] \subseteq (a, b)$

$$\left| \int_a^b g - \int_\alpha^\beta g \right| < \varepsilon$$



Oss f è integrabile su (a, b) perché

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \leq g(x)$$

$$\int_a^b f \text{ è assolutamente convergente: } \int_a^b |f| \leq \int_a^b g < +\infty$$

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^\alpha f_n - f + \int_\alpha^\beta f_n - f + \int_\beta^b f_n - f \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_a^\alpha |f_n| + |f| + \int_\alpha^\beta |f_n - f| + \int_\beta^b |f_n| + |f| \\
&\leq \int_a^\alpha 2g + \varepsilon + \int_\beta^b 2g \\
&\quad \left(f_n \rightrightarrows f \text{ in } [a, \beta] \quad \int_\alpha^\beta |f_n - f| \rightarrow 0 \right)
\end{aligned}$$

$$\leq 3\varepsilon.$$

□

[si vedano anche "APPUNTI DI ANALISI UNO" SULLA
UNA PAGINA WEB CAPITOLO 6]

Teo [scambio del limite con l'integrale]

$x \quad t$

$f: I \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $a \geq -\infty$, $b \leq +\infty$

f continua. Se esiste $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, continua,

① $|f(x, t)| \leq g(t) \quad \forall x \in I \quad \forall t \in (a, b)$

② $\int_a^b g < +\infty$

$\rightarrow f(x, \cdot)$ è assolutamente integrabile su (a, b)

Allora

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

$F: I \rightarrow \mathbb{R}$ è ben definita

F è continua cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b f(x_0, t) dt$$

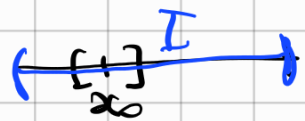
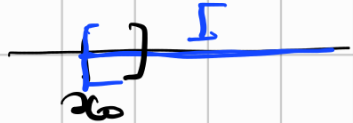
dim sia $x_0 \in I$. Sia $\varepsilon > 0$.

Prendiamo, come prima, $[a, \beta] \subseteq (a, b)$

te. $\int_a^\alpha g + \int_\beta^b g < \varepsilon$ ma $|f(x, t)| \leq g(t)$

così: $\left| \int_a^\alpha f(x, t) dt - \int_a^\alpha f(x_0, t) dt + \int_\beta^b f(x, t) dt - \int_\beta^b f(x_0, t) dt \right| < \varepsilon$

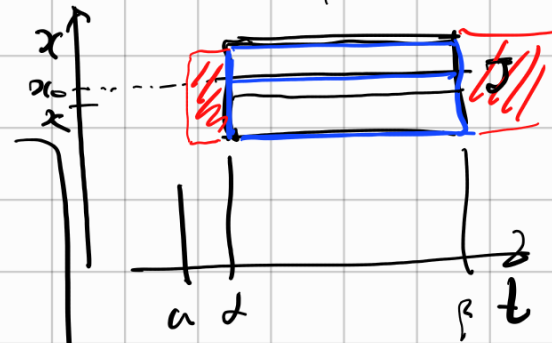
Ora mi rimane l'intervallo $[\alpha, \beta] \subseteq (a, b)$.
 Prendo J intervallo compatto intorno di x_0 .

(se x_0 è interno a I : )
 (se x_0 è un estremo: )

$f: J \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua
 sul compatto $J \times [\alpha, \beta]$

Dunque per Heine-Cantor

($f: X \rightarrow \mathbb{R}$, X sp. metrico compatto,
 e f è continua $\Rightarrow f$ è uniformemente
 continua) è la stessa dimostrazione
 vista ad ANALISI VNO $(x, y) \mapsto d(x, y)$



f è uniformemente continua su $J \times [\alpha, \beta]$:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in J \forall t, t' \in [\alpha, \beta] : \sqrt{|x-x'|^2 + |t-t'|^2} < \delta \Rightarrow |f(x, t) - f(x', t')| < \varepsilon$
 in particolare: $t' = t, x' = x_0$

$\exists \delta > 0 \forall x \in J \forall t \in [\alpha, \beta] : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x, t) - f(x_0, t)| < \varepsilon$
 $\forall x \in J \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |f(x, t) - f(x_0, t)| < \varepsilon$

ovvero $f(x, \cdot) \rightrightarrows f(x_0, \cdot)$ su $[\alpha, \beta]$

Data $x_k \rightarrow x_0 \quad f_k(t) \doteq f(x_k, t) \quad f(t) \doteq f(x_0, t)$

dunque $\int_{\alpha}^{\beta} f_k \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f_0$

Per il collegamento tra limite di funzioni e limite di

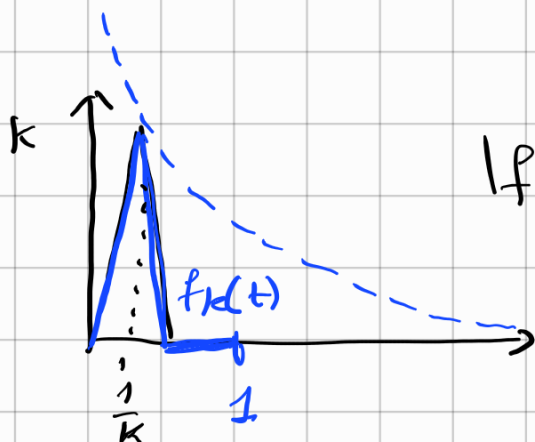
successore

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b f(x_0, t) dt \quad \square$$

OPPURE

$$\left| \int_a^b f(x, t) dt - \int_a^b f(x_0, t) dt \right| \leq (b-a) \sup_{t \in [a, b]} |f(x, t) - f(x_0, t)| < \varepsilon \quad \text{se } |x - x_0| < \delta$$

Esempio negativo



$$|f_k(t)| \leq \frac{1}{t}$$

$$\text{ma } \int_0^1 \frac{1}{t} dt = +\infty$$

$$\int_0^1 f_k = 1 \quad f_k \rightarrow 0 \text{ su } [d, 1] \text{ con } d > 0$$

$$\text{ma } \int_0^1 0 = 0$$

↓ ENUNCIATO LA VOLTA SCORSA

Teo (scambio della derivata con l'integrale)

Sio $f: I \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, t) \mapsto f(x, t)$

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo
 $a \geq -\infty, b \leq +\infty$

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

se f continua su $I \times (a, b)$, $\int_a^b f(x, t) dt$ converge $\forall x \in I$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ esiste ed è continua su $I \times (a, b)$

e esiste $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^+$ tale che:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq g(t) \quad \forall x \in I \quad (g \geq 0)$$

$$\int_a^b g(t) dt < +\infty$$

Fissiamo $x_0 \in I$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{d}{dx} \int_a^b f(x,t) dt \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_a^b f(x,t) dt - \int_a^b f(x_0,t) dt}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^b \frac{f(x,t) - f(x_0,t)}{x - x_0} dt \quad \exists \xi(x,t) \in (x_0, x)$$

Lagrange

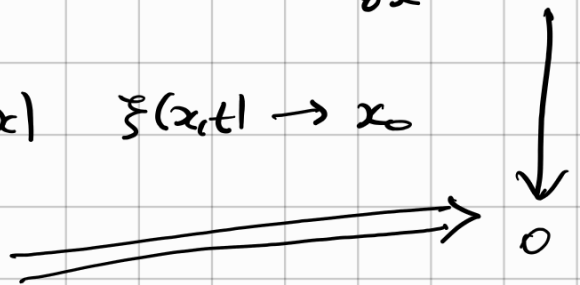
$$F(x,t) = \begin{cases} \frac{f(x,t) - f(x_0,t)}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(x,t), t) & \text{se } x \neq x_0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

se $x \neq x_0$ $F(x,t)$ è continua
 in (x_0, t_0) F è continua?
 se $(x,t) \rightarrow (x_0, t_0)$

$$|F(x,t) - F(x_0, t_0)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(x,t), t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right|$$

ma $\xi(x,t) \in (x_0, x)$ $\xi(x,t) \rightarrow x_0$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ è continua



F è dominata?

$$|F(x,t)| = \begin{cases} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(x,t), t) \right| \leq g(t) \\ \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| \leq g(t) \end{cases}$$

si scambia il limite con l'integrale!

□

Esempio positivo (vedi lezione scorsa)

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-t} t^{x-1}}_{\text{integrand}} dt \quad x > 0$$

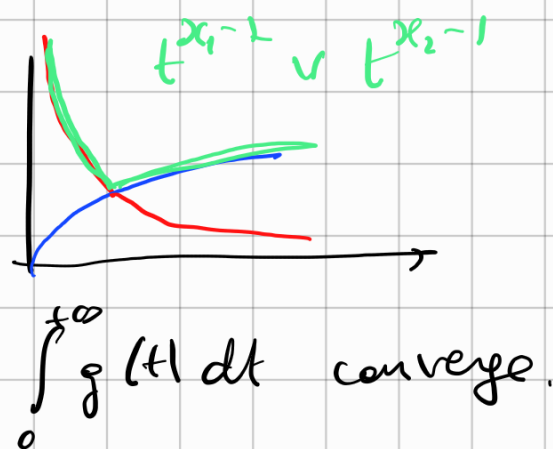
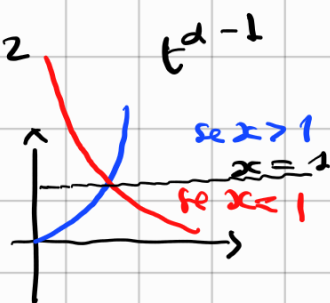
$\Gamma(x)$ è continua? è derivabile?

$$0 \leq e^{-t} t^{x-1} \stackrel{(*)}{\leq} g(t) \quad \text{su } I = (0, +\infty) \quad (x > 0)$$

ma in realtà fissato $x_0 > 0$ basta avere $(*)$

su $[x_1, x_2]$ con $x_1 < x_0 < x_2$

$$0 \leq e^{-t} t^{x-1} \leq e^{-t} (t^{x_1-1} \vee t^{x_2-1}) =: g(t) \quad \forall x \in [x_1, x_2]$$



$$\left. \begin{array}{l} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x_1-1} dt < +\infty \\ \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x_2-1} dt < +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \int_0^{+\infty} g(t) dt \text{ converge.}$$

