

ANALISI MATEMATICA 2

LEZIONE 22 - 18.11.2025

Convergenza totale.

SERIE DI FUNZIONI

✓ (*)

Se $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$

$S: A \rightarrow \mathbb{R}$

se $\sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_{\infty}$ è convergente diciamo che
 $\hat{=}$ serie numerica
 a termini positivi.

la serie di funzioni (*) converge totalmente.

Teo (convergenza totale) Se $\sum f_k$ converge totalmente
 allora converge uniformemente.

dim

Posto $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(x)$ [somme parziali]

per definire $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \quad \forall x$

cioè $S_n(x) \rightarrow S(x)$ puntualmente

vogliamo dimostrare che $S_n \rightarrow S$ [la convergenza
 è uniforme]

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k(x) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \|f_k\|_{\infty}$$

[coda
della
serie] $\rightarrow$ $\sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_{\infty}$ converge $\Rightarrow$ la coda
 è infinitesima

dunque

$$\|S - S_n\|_{\infty} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \|f_k\|_{\infty} \rightarrow 0$$

□

(Teo)
 CONV. TOTALE $\Rightarrow$ CONV. UNIFORME $\Rightarrow$ CONV. PUNTUALE
 $\searrow$ CONV ASSOLUTA PUNTUALE $\nearrow$

SERIE DI POTENZE

$a_k \in \mathbb{R}$ (o $a_k \in \mathbb{C}$) $x_0 \in \mathbb{R}$ centro della serie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \underbrace{(x-x_0)^k}_{\text{potenze}}$$

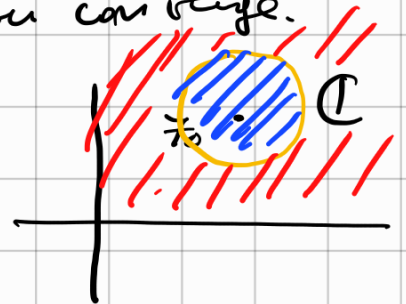
$$l = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \quad R = \frac{1}{l} \quad \left(\frac{1}{+\infty} = 0\right)$$

R = raggio di convergenza

se $|x-x_0| < R$ la serie converge assolutamente

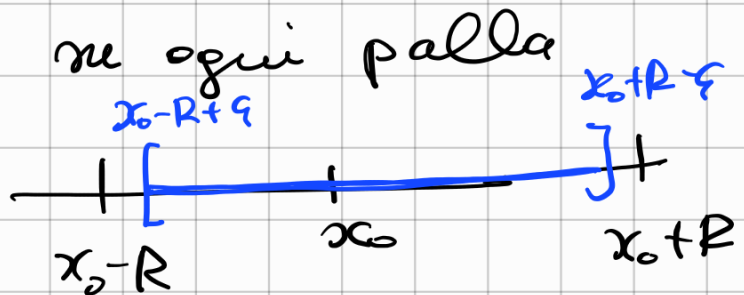
se $|x-x_0| > R$ i termini $a_k (x-x_0)^k$ non sono limitati $\Rightarrow$ non sono infinitesimi
 $\Rightarrow$ la serie non converge.

(ANALISI UNO)



Teo Una serie di potenze converge totalmente su ogni palla

$$B_{R-\varepsilon}(x_0)$$



dim

$$A_\varepsilon = B_{R-\varepsilon}(x_0)$$

$$\|a_k (x-x_0)^k\|_\infty \leq |a_k| \sup_{x \in A_\varepsilon} \underbrace{|x-x_0|}_1^k$$

$$\leq |a_k| (R-\varepsilon)^k \quad R = \frac{1}{\ell}$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k| (R-\varepsilon)^k} = \ell (R-\varepsilon) < 1$$

$$\Rightarrow \sum \|a_k (x-x_0)^k\|_\infty \text{ converge} \quad \square.$$

Corollario la serie converge uniformemente su

sugli $B_{R-\varepsilon}(x_0)$

[i termini $a_k (x-x_0)^k$ sono continui]

① la somma della serie $f(x)$ è continua su ogni $B_{R-\varepsilon}(x_0) \Rightarrow$ è continua su $B_R(x_0)$

② [i termini $a_k (x-x_0)^k$ sono derivabili]
 dunque f è anche derivabile su $B_R(x_0)$
 e $f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot a_k (x-x_0)^{k-1}$ per $|x-x_0| < R$
 la $\uparrow$ derivata è la somma delle derivate

dim ② la serie delle derivate (*) è una serie di potenze $\sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot a_k (x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{(k+1) a_{k+1}}_{(*)} (x-x_0)^k$

siccome $\sqrt[k]{k+1} \rightarrow 1$ questa ha lo stesso raggio di convergenza R della $\sum a_k (x-x_0)^k$.

converge totalmente su $B_{R-\varepsilon}(x_0)$ e quindi uniformemente quindi posso scambiare la derivata col limite:

Lemma $f'_k \rightarrow g$, $f_k(x) \rightarrow f(x)$ puntualmente
 allora f è derivabile e $g = f'$ (e $f_k \rightarrow f$).
 [dim già vista: $f_k(x) = f_k(x_0) + \int_{x_0}^x f'_k(t) dt$]

Dunque su ogni $B_{R-\varepsilon}$ la serie delle
 derivate converge uniformemente alla
 derivata della serie. $\square$

$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k$ è di classe
 C^∞ perché posso iterare il procedimento.

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(a_k (x-x_0)^k \right)^{(n)}$$

Esempio 1 (già visto) $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ per $|x| < 1$.

Esempio 2 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x^2)^k$ ← serie geometrica
 $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$
 $(R=1)$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left((-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right)'$$

dunque posto $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ ←

so che $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (\arctan x)'$

ma $f(0) = 0 = \arctan(0) \Rightarrow f(x) \equiv \arctan x$.

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \forall x \in (-1, 1).$$

In particolare:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

[⚠ $\notin (-1, 1)$ (MA) C'E' LEMMA di Abel] (Formula di Gregory-Leibniz)

ES Δ calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k}$. (introduco $\sum k x^k$).

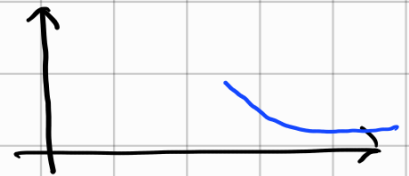
MORALE: $\frac{d}{dx} \sum = \sum \frac{d}{dx}$ (per le serie di potenze e vice)
 $\uparrow$
 (scambio della derivata col limite)

SCAMBIO DELLA DERIVATA CON L'INTEGRALE

GAMMA di EULERO

ES $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$

$\uparrow$
 integrale improprio



Punti "cattivi"

(ANALISI UNO)

$+\infty: e^{-t} t^{x-1} \ll \frac{1}{t^2}$
 $\Rightarrow$ l'integrale $\int_1^{+\infty}$ converge

$0^+: e^{-t} t^{x-1} \sim t^{x-1}$
 $\int_0^1$ converge $\Leftrightarrow x-1 > -1$
 cioè $x > 0$.

$\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è ben definita

$\Gamma(n) = (n-1)!$ $\left[\Gamma(x+1) \text{ estende il fattoriale da } \mathbb{N} \text{ a } (-1, +\infty) \right]$
 $\uparrow$
 si dimostra per induzione facendo una integrazione per parti

• Γ è continua? (SI)

• Γ è derivabile?

$$\Gamma'(x) \stackrel{?}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-t} t^{x-1} \right) dt \quad (\text{SI})$$

Teo (già visto) se $f_k \rightarrow f$ $\int_a^b f_k \rightarrow \int_a^b f$

(MA) • l'integrale non è impuro a, b finiti.
 • nell'esempio se $x < 1$ le funzioni integrate non sono neanche limitate $\Rightarrow$ non c'è convergenza uniforme su tutto (a, b) .

Teo (convergenza dominata per l'integrale di Riemann)

Sia $f : I \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo
 $(x, t) \mapsto f(x, t)$ $a \geq -\infty, b \leq +\infty$

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

se f continua su $I \times (a, b)$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ esiste ed è continua su $I \times (a, b)$

e esiste $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

• $|f(x, t)| \leq g(t) \quad \forall x \in I \quad (g \geq 0)$
 • $\int_a^b g(t) dt < +\infty$

