

ANALISI MATEMATICA 2

LEZIONE 20 - 11.11.2025

CONVERGENZA UNIFORME

$$f, f_k: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_k \rightarrow f$$

$$\|f_k - f\|_\infty \rightarrow 0$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|$$

$$d_\infty(f_k, f)$$

($k \rightarrow \infty$)

$$\textcircled{1} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k > N$$

$$\|f_k - f\|_\infty < \varepsilon$$

$$\forall x \quad |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

N non dipende da x

(ε uniforme in x)

UNIFORME
 $f_k \rightarrow f$

$\textcircled{2}$

$$\forall x \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k > N$$

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

N può dipendere da x

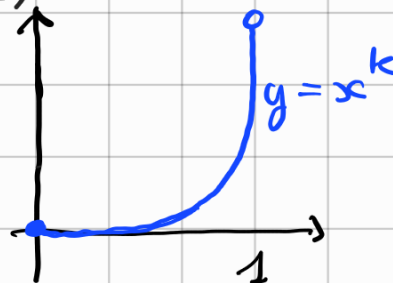
PUNTUALE

$$f_k \rightarrow f \Rightarrow \forall x: f_k(x) \rightarrow f(x)$$

Esempio 1 (~~❌~~)

$$f_k: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_k(x) = x^k$$



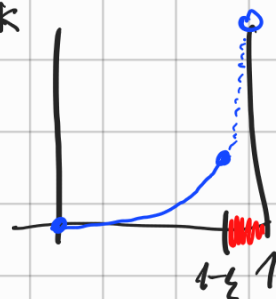
$$\forall x \in [0, 1) \quad f_k(x) \rightarrow 0$$

f_k converge puntualmente a 0 ma non uniformemente
perché se fosse $f_k \rightarrow f \Rightarrow f = 0$ (per il limite puntuale)

$$\|f_k - 0\|_\infty = \|f_k\|_\infty = \sup_{x < 1} f(x) = 1 \text{ non tende a } 0 \quad \square$$

Esempio 1bis $f_k(x) = x^k$ $f_k : [0, \frac{99}{100}] \rightarrow \mathbb{R}$

In questo caso $f_k \rightarrow 0$ perché $\|f_k\|_\infty = f_k(\frac{99}{100}) \rightarrow 0$

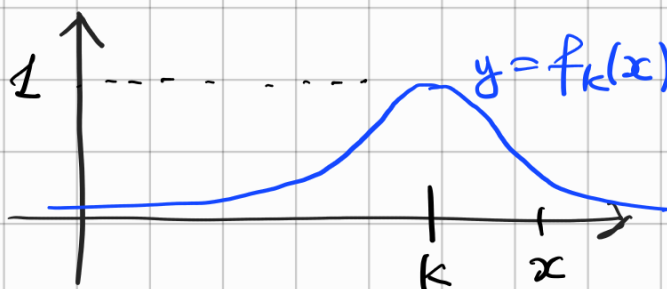


Esempio 2 $f_k(x) = \frac{\sin(2^k \cdot x)}{k}$ $f_k(x) \rightarrow 0 \quad \forall x$

e anche $\|f_k\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sin(2^k x)}{k} \right| \leq \frac{1}{k} \rightarrow 0$

Esempio 3

$$f_k(x) = e^{-(x-k)^2}$$



$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_k(x) \rightarrow 0$

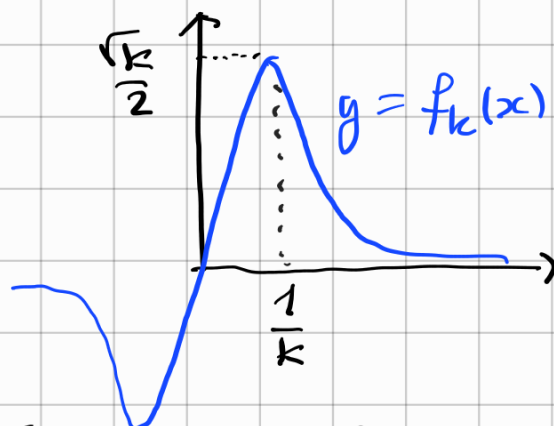
ma $\|f_k\|_\infty = \max_{x \in \mathbb{R}} |f_k(x)| = f_k(k) = 1$ non tende

a zero

non c'è convergenza
uniforme.

Esempio 4 $f_k:$

$$f_k(x) = \frac{k\sqrt{k} \cdot x}{1 + k^2 x^2}$$



Converge puntualmente? Converge uniformemente?

① limite puntuale $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k\sqrt{k} x}{1 + k^2 x^2} =$

$$= \begin{cases} 0 & x=0 \\ \frac{k^{3/2} x}{k^2 (\frac{1}{k^2} + x^2)} = \frac{x}{\sqrt{k} (\frac{1}{k^2} + x^2)} \rightarrow 0 \end{cases}$$

Ciò $f_k \rightarrow 0$ puntualmente.

② limite uniforme. (se esiste $\bar{\epsilon}$)

$$\|f_k\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_k(x)| = \sup_{x \geq 0} f_k(x)$$

f è dispari $f_k(x) \rightarrow 0$
per $x \rightarrow +\infty$

$$= \max_{x \geq 0} f_k(x)$$

$$f'_k(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{k\sqrt{k}x}{1+k^2x^2} \right) = \frac{k\sqrt{k}(1+k^2x^2) - k\sqrt{k}x \cdot k^2x}{(1+k^2x^2)^2}$$

$$= \frac{k\sqrt{k} - k\sqrt{k}k^2x^2}{(1+k^2x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow k^2x^2 = 1$$

$$x = \pm \frac{1}{k}$$

$$f_k\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{k\sqrt{k} \frac{1}{k}}{1+k^2\left(\frac{1}{k}\right)^2} = \frac{\sqrt{k}}{2}$$

$$\|f_k\|_\infty = \frac{\sqrt{k}}{2} \rightarrow \infty \quad \text{non tende a zero}$$

non c'è convergenza uniforme $\square$

COMPLETEZZA

A insieme $\neq \emptyset$

$$B(A) = \{ f: A \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ limitata} \}$$

$$= \{ f \in \mathbb{R}^A : \|f\|_\infty < +\infty \}$$

$\uparrow$

$\mathbb{R}^A$ è uno spazio vettoriale reale

ha dimensione infinita se $\#A = +\infty$.

$B(A) \subseteq \mathbb{R}^A$ è un sottospazio vettoriale.

Su $B(A)$ $\|\cdot\|_\infty$ è una norma (lezione precedente)

diremo che $(B(A), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio normato

$\Downarrow$

spazio metrico

def Uno spazio normato si dice essere uno spazio di Banach se è completo

Teo $(B(A), \|\cdot\|_\infty)$ è completo (quindi è Banach)

dim
Ricordo (X, d) è completo se ogni successione di Cauchy converge.

x_k è di Cauchy: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, j > N \quad d(x_k, x_j) < \varepsilon$.

Nel nostro caso: f_k è di Cauchy in $(B(A), \|\cdot\|_\infty)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k, j > N \quad \|f_k - f_j\|_\infty < \varepsilon$$

$$\leftarrow \forall x \in A \quad |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon$$

$\forall x \in A \quad f_k(x)$ e di Cauchy in $\mathbb{R}$.

$\exists f(x)$ t. $f_k(x) \rightarrow f(x)$ $\uparrow$
complete

$f_k \rightarrow f$?

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f(x)| &\leq |f_k(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f(x)| \\ &\leq \|f_k - f_j\|_\infty + \underbrace{|f_j(x) - f(x)|} \end{aligned}$$

Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k > N \quad \forall j > k \quad \|f_k - f_j\|_\infty < \varepsilon$$

$$< \varepsilon + |f_j(x) - f(x)| \quad \forall j \quad \forall x$$

per $j \rightarrow \infty$

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x$$

$\Downarrow$

$$\|f_k - f\|_\infty < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \quad \forall k > N \quad \|f_k - f\|_\infty < \varepsilon$$

ovvero $\|f_k - f\|_\infty \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$ $\square$



SPAZIO DELLE FUNZIONI CONTINUE

$$\underline{A \subseteq \mathbb{R}^m}$$

$$C(A) = C^0(A, \mathbb{R}) = \{ f : A \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua} \}$$

$$C_b(A) = C(A) \cap B(A) = \left\{ f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua} \right. \\ \left. \text{e limitato} \right\}$$

$\uparrow$
(borné / bounded)

Oss Se A è compatto $C_b(A) = C(A)$.

Teo $C_b(A)$ è chiuso in $B(A)$ (rispetto alla distanza uniforme).

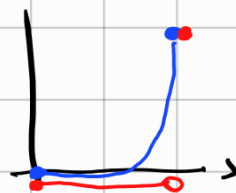
Quindi $C_b(A)$ è a sua volta completo.

Equivalentemente:

Teo Se f_k è una successione di funzioni continue (in x_0) e $f_k \rightarrow f$ allora f è continua (in x_0)
(limite uniforme di f_n continue è continuo).

Esempio (negativo) $f_k(x) = x^k$ $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_k(x) \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$



f_k sono continue ma f non lo è.

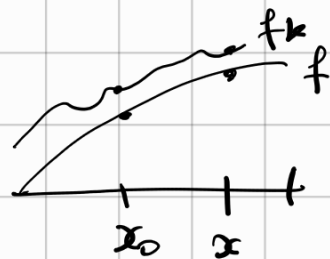
dim (teo)

$f_k = A \rightarrow \mathbb{R}$ continue

$f_k \Rightarrow f: A \rightarrow \mathbb{R}$

f è continua?

Fissiamo $x_0 \in A$.



$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f(x_0)|$$

$$\leq 2 \|f - f_k\|_\infty + |f_k(x) - f_k(x_0)|$$

Fissato k :

f_k è continua

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_k(x) - f_k(x_0)| < \varepsilon$$

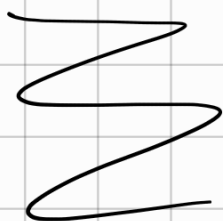
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq 2 \|f - f_k\|_\infty + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k : \|f - f_k\|_\infty < \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon.$$

$\Rightarrow f$ è continua in x_0 $\square$

(oss usando limsup risulta più facile)



Esempio

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2^k \cdot x)}{k^2}$$

$S(x)$ è continua!

dim

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2^k x)}{k^2}$$

$S_n(x)$ è convergente (puntuale)

perché

$$\left| \frac{\sin(2^k x)}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{e} \quad \sum \frac{1}{k^2} < +\infty$$

(convergenza assoluta!)

$$S_n(x) \rightarrow S(x)$$

puntuale.

$$|S_n(x) - S(x)| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin(2^k x)}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\|S_n - S\|_{\infty} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

← coda di una
serie convergente

è infinitesima!

$$S_n \Rightarrow S.$$

S_n sono continue $\xrightarrow{\text{Teo}}$ S è continua! $\square$