

ANALISI MATEMATICA 2

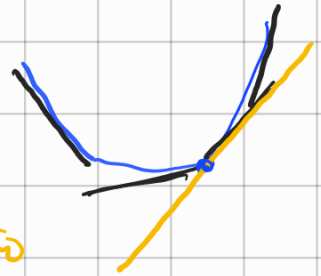
LEZIONE 19 - 10.11.2025

FUNZIONI CONVESSE

SOTTODIFFERENZIALE / PIANI DI SUPPORTO
 f convessa

$$\partial f(x_0) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq f(x_0) + \langle \xi, x - x_0 \rangle \right\}$$

$\uparrow$ sotto differenziale (∂f) $\uparrow$ sottogradiente $\underbrace{\quad}_{\text{piano di supporto}}$



∂f "differenziale" $\neq$ "gradiente"

Oss

$$df_{x_0} \in (\mathbb{R}^n)^*$$

$\xi = \nabla f(x_0)$ rappresenta df

con la dualità data dal prodotto scalare

$$\langle \nabla f(x_0), v \rangle = df_{x_0}[v].$$

∂f mescola le due rappresentazioni.

tesorella già visto.

ES Se f è convessa, differenziabile in x_0 $\nabla f(x_0) \in \partial f$.

Proprietà ① $\partial f(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso.

$$\begin{array}{l} \text{dim} \quad \xi_1, \xi_2 \in \partial f(x_0) \\ \quad \quad t \in [0,1] \\ \quad \quad \downarrow \\ (1-t)\xi_1 + t\xi_2 \in \partial f(x_0) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} f(x) - f(x_0) \geq \langle \xi_1, x - x_0 \rangle \\ f(x) - f(x_0) \geq \langle \xi_2, x - x_0 \rangle \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot (1-t) \\ \cdot t \end{array}$$

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle (1-t)\xi_1 + t\xi_2, x - x_0 \rangle$$

② $\partial f(x)$ è "crescente"

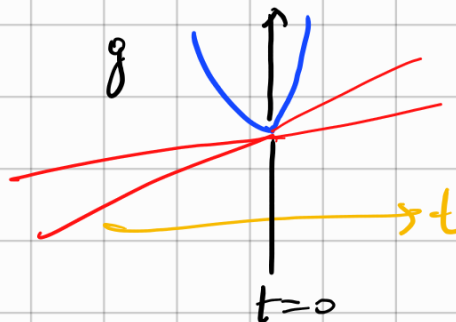
$$\xi \in \partial f(x), \eta \in \partial f(y) \Rightarrow \langle \eta - \xi, y - x \rangle \geq 0$$

$$\begin{array}{l} \text{dim} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(y) \geq f(x) + \langle \xi, y - x \rangle \\ f(x) \geq f(y) + \langle \eta, x - y \rangle \end{array} \right\} \quad f(y) + f(x) \geq f(x) + f(y) + \langle \xi - \eta, y - x \rangle \quad \square \end{array}$$

③ f differenziabile in $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) \supseteq \{\nabla f(x_0)\}$ GIÀ DETTO
 viceversa se $\xi_1, \xi_2 \in \partial f(x_0)$, $\xi_1 \neq \xi_2 \Rightarrow f$ non
 è differenziabile in x_0 .

dim $\xi_1 \neq \xi_2 \Rightarrow \exists v \neq 0 \quad \langle \xi_1, v \rangle \neq \langle \xi_2, v \rangle$

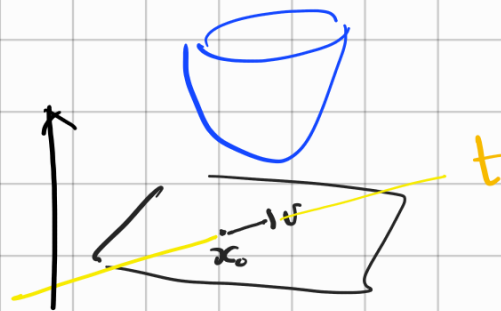
$$g(t) = f(x_0 + tv) \Rightarrow \begin{cases} f(x_0 + \langle \xi_1, tv \rangle) = g(0) + t \langle \xi_1, v \rangle \\ f(x_0 + \langle \xi_2, tv \rangle) = g(0) + t \langle \xi_2, v \rangle \end{cases}$$



ANALISI VNO

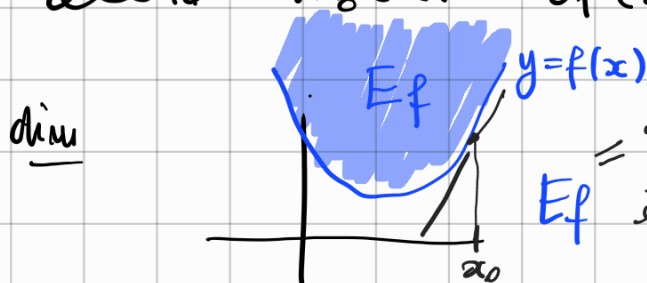
g non è derivabile
 in $t=0$.

f non è derivabile
 in direzione v $\square$



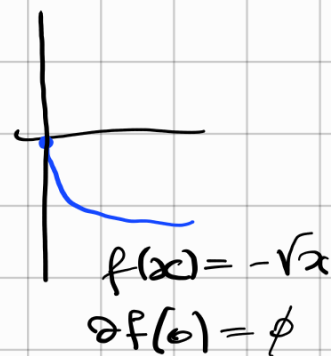
Quindi: f differenziabile in $x_0 \quad \partial f(x_0) = \{\xi\}$
 inoltre in tal caso $\xi = \nabla f(x_0)$.

④ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto convesso, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ convessa
 allora $\forall x_0 \in \Omega \quad \partial f(x_0) \neq \emptyset$.



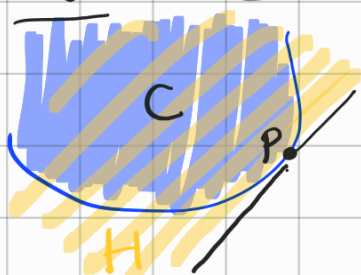
$$E_f = \{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}$$

E_f è convesso. E_f è chiuso perché
 f è continua.

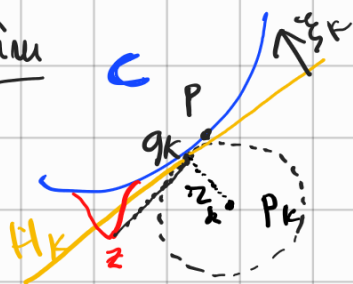


è conseguenza del teorema seguente. Il piano di supporto
 non può essere verticale in quanto x_0 è punto interno.

Teorema $C \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso convesso, $p \in \partial C$ esiste un
 semispazio H tale che $p \in \partial H$
 e $H \supseteq C$.



dim



$$r_k = |q_k - p_k|$$

$p \in \partial C$, C chiuso $\Rightarrow p \in C$.

ma $\exists p_k \notin C$ $p_k \rightarrow p$.

sia q_k proiezione di p_k su C .

H_k il semispazio con $\partial H_k \ni q_k$ che non interseca $B_{r_k}(p_k)$.

Altrimenti che $C \subseteq H_k$. Se fosse $z \in C$ $z \notin H_k$ il segmento $[z, q_k] \subseteq C$ perché C convesso ma $[z, q_k] \cap B_{r_k}(p_k) \neq \emptyset$ assurdo!

$$H_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \xi_k, x - q_k \rangle \geq 0\}$$

$\xi_k \in S^1$ compatto

$$\exists k_j: \xi_{k_j} \rightarrow \xi \in S^1$$

$$C \subseteq H_{k_j}$$

$$x \in C \Rightarrow \langle \xi_{k_j}, x - q_{k_j} \rangle \geq 0$$

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \xi, x - q \rangle \geq 0\} \Leftarrow \langle \xi, x - p \rangle \geq 0$$

$H \supseteq C$. $\square$

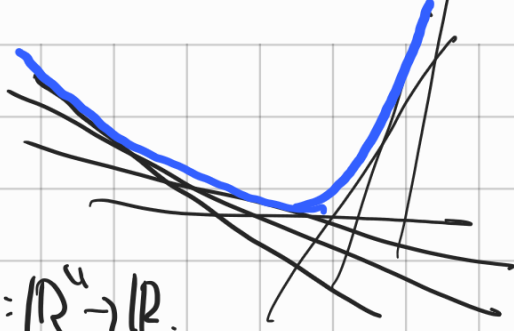
Corollario ogni convesso chiuso C si può scrivere

$$\text{nella forma : } C = \bigcap_{x \in \partial C} H_x$$

H_x semispazio di supporto.

Corollario ogni funzione convessa $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si può scrivere nella forma:

$$f(x) = \sup \{ f(x_0) + \langle \xi, x - x_0 \rangle : x_0 \in \Omega, \xi \in \partial f(x_0) \}$$



Esempio 1 $f(x) = |x| \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

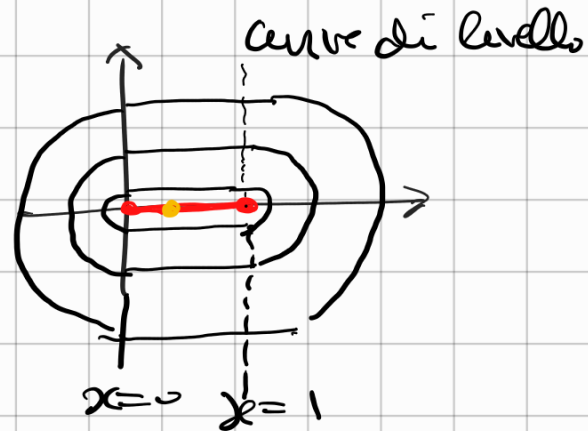
$$\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\} \quad \text{se } x_0 \neq 0 \quad \nabla f(x_0) = \frac{x}{|x|}$$

$$\partial f(0) = \overline{B_1(0)} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 1\}$$

$$(z = f(x_0) + \langle \xi, x - x_0 \rangle = \langle \xi, x \rangle)$$

Esempio 2 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} & \text{se } x \leq 0 \\ |y| & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{(x-1)^2 + y^2} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



$$\partial f(x, 0) = \{0\} \times [-1, 1] \quad \text{se } 0 \leq x \leq 1$$

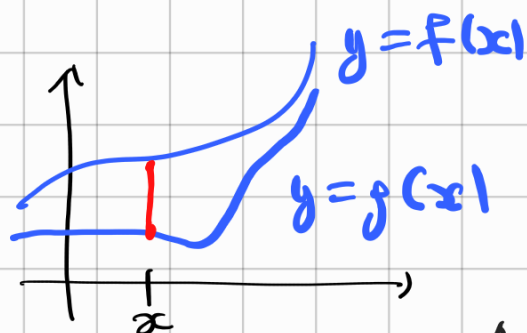
Si potrebbe mostrare che ∂f è continuo

$$\left[\begin{array}{l} x_k \rightarrow x_0 \quad \exists \xi_k \in \partial f(x_k) \quad \exists \xi_0 \in \partial f(x_0) \\ \text{tali che } \xi_k \rightarrow \xi_0. \end{array} \right]$$


CONVERGENZA UNIFORME

Siano $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ A insieme qualunque $\neq \emptyset$
(ci interessa: $A \subseteq \mathbb{R}$ o $A \subseteq \mathbb{R}^n$)

Vogliamo definire una
distanza tra f e g .



$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad f \in \mathbb{R}^A$$

$$f: A \rightarrow B \Leftrightarrow f \in B^A.$$

$\uparrow$
è uno spazio vettoriale reale.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

$$d_{\infty}(f, g) \doteq \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$$

$\uparrow$
distanza uniforme.

$$\|f\|_{\infty} \doteq \sup_{x \in A} |f(x)|$$

$\uparrow$
norma uniforme

$$d_{\infty}(f, g) = \|f - g\|_{\infty}$$

d_{∞} è una distanza? ovvero: $\|\cdot\|_{\infty}$ è una norma?

Nota $\|f\|_{\infty}$ può essere $+\infty$.

Perché non lo sia consideriamo f e g limitate.

$$\mathcal{B}(A) = \{ f: A \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ limitata} \}$$

$$\mu(B(A)) \quad \|f\|_\infty < +\infty.$$

Teo Se $B(A)$ $f \mapsto \|f\|_B$ é uma norma.

dim (1) $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$
 also

(2) $\|t \cdot f\|_\infty = |t| \cdot \|f\|_\infty$ facile

$$(3) \quad \|f + g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$$

$$\|f\|_\infty \leq M \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A \quad |f(x)| \leq M.$$

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$$\Downarrow$$

$$\forall x \in A: \quad |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$$\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \leftarrow$$

$$\quad \quad |f(x)| + |g(x)|$$

□