

# Analisi Matematica A e B

## Prova scritta n. 3

Laurea in Fisica, a.a. 2024/25  
Università di Pisa

11 luglio 2025

1. Si consideri l'equazione

$$\sin x = mx^2$$

dove  $x$  è l'incognita e  $m$  è un parametro reale positivo.

- (a) Dimostrare che per ogni  $m > 0$  nell'intervallo  $[0, \pi]$  l'equazione ha esattamente due soluzioni.
- (b) Dimostrare che esiste un unico  $m > 0$  tale che l'equazione ha esattamente tre soluzioni distinte.

2. Al variare di  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^\infty (\log x)^\alpha \cdot x^\beta dx.$$

3. (a) Trovare le primitive della funzione  $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2y-y^2}}$ .
- (b) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u' = \sqrt{u(2-u)} \\ u(0) = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

- (c) Verificare che la funzione  $u$  è crescente e determinare l'intervallo massimale di esistenza.