

1. (a) Al variare di $m \in \mathbb{R}$, si determini il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^3 + 1 = mx.$$

- (b) Si consideri la funzione $g(m) = \max\{x \in \mathbb{R} : x^3 + 1 = mx\}$. Determinare i valori di m in cui g è continua e i valori in cui g è derivabile.
(c) Si calcoli $g'(0)$.

2. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \int_0^1 \frac{\sin \frac{x}{n}}{x} dx.$$

3. (a) Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{\sin y}, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

si trovi la soluzione, C^1 , specificando l'intervallo I massimale di esistenza.

- (b) Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(x(t)) \\ x'(t) = -\sin(y(t)) \\ y(0) = x(0) = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

- i) Si trovi l'intervallo J massimale di esistenza.
ii) Si provi che $y(t), x(t) \in (0; \pi)$.
iii) Si studino, e nel caso esistano si calcolino, i limiti agli estremi di J della soluzione $(x(t), y(t))$.