Analisi Matematica A e B
Prova parziale n. 3

Laurea in Fisica, a.a. 2024/25
Università di Pisa

5 aprile 2025

1. Determinare la funzione $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che
$$\begin{cases} e^x \cdot u' + 1 = u, \\ \lim_{x \to +\infty} u(x) = 2. \end{cases}$$

2. Si consideri il problema di Cauchy:
$$\begin{cases} u' = \frac{u^2}{1+x^2}, \\ u(0) = y. \end{cases}$$
   (a) Dimostrare che se $u(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale $u' = \frac{u^2}{1+x^2}$ anche $-u(-x)$ è soluzione.
   (b) Determinare, al variare di $y \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy.
   (c) Determinare, al variare di $y \in \mathbb{R}$, l'intervallo massimale di esistenza della soluzione e gli $y \in \mathbb{R}$ per i quali la soluzione è limitata.
   (d) Sia u la soluzione dell'equazione definita su tutto $\mathbb{R}$ con $u(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Mostrare che $u(x) = x + o(1)$ per $x \to +\infty$.

3. (a) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione
$$u'' - u' = 1$$
   (b) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione
$$u'' - u' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' - \frac{1}{1+x^2}.$$