Analisi Matematica A e B
Soluzioni prova parziale n. 3

Laurea in Fisica, a.a. 2024/25
Università di Pisa

5 aprile 2025

1. Determinare la funzione $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} e^x \cdot u' + 1 = u, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 2. \end{cases}$$

Soluzione. Si tratta di una equazione differenziale lineare del primo ordine. Riordinando i termini, e normalizzando si ottiene la forma standard:

$$u' - e^{-x} \cdot u = 1.$$

Moltiplicando ambo i membri dell'equazione per il fattore integrante $e^{e^{-x}}$ (dove e^{-x} viene scelta in quanto primitiva di $-e^{-x}$), otteniamo:

$$e^{e^{-x}} \cdot u' - e^{e^{-x}} e^{-x} \cdot u = e^{e^{-x}}$$

ovvero

$$\left(e^{e^{-x}} \cdot u\right)' = \left(e^{e^{-x}}\right)'$$

da cui

$$e^{e^{-x}} \cdot u = e^{e^{-x}} + c.$$

Quando $x \to +\infty$ si ha $e^{e^{-x}} \to 1$ e, come specificato dal testo, $u \to 2$. Dunque per $x \to +\infty$ si ha

$$1 \cdot 2 = 1 + c \implies c = 1.$$

Concludiamo

$$u = \frac{e^{e^{-x}} + 1}{e^{e^{-x}}} = 1 + e^{-e^{-x}}.$$

$\square$

2. Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u' = \frac{u^2}{1+x^2}, \\ u(0) = y. \end{cases}$$

(a) Dimostrare che se $u(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale $u' = \frac{u^2}{1+x^2}$ anche $-u(-x)$ è soluzione.
(b) Determinare, al variare di $y \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy.
(c) Determinare, al variare di $y \in \mathbb{R}$, l'intervallo massimale di esistenza della soluzione e gli $y \in \mathbb{R}$ per i quali la soluzione è limitata.
(d) Sia u la soluzione dell'equazione definita su tutto $\mathbb{R}$ con $u(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Mostrare che $u(x) = x + o(1)$ per $x \to +\infty$.

Soluzione. L'equazione differenziale è del primo ordine, a variabili separabili. Vale il teorema di esistenza e unicità delle soluzioni.

Se $u = u(x)$ è una soluzione e poniamo $v(x) = -u(-x)$, si ha :

$$v'(x) = u'(-x) = \frac{u^2(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{(-v(x))^2}{1+x^2} = \frac{v^2(x)}{1+x^2}.$$

Dunque anche v è soluzione, come richiesto nel punto (a).

Osserviamo che $u = 0$ è soluzione dell'equazione differenziale, e quindi risolve il problema di Cauchy con $y = 0$. Visto che c'è unicità delle soluzioni, le altre soluzioni hanno segno costante e, per la simmetria data dal punto (a), sarà sufficiente considerare il caso $y > 0$.

Se $y > 0$ abbiamo quindi $u > 0$ e dunque possiamo dividere per u separando le variabili:

$$\frac{u'}{u^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Integrando ambo i lati e ponendo $u = u(x)$, $du = u'dx$ si ottiene:

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

da cui

$$-\frac{1}{u} = \operatorname{arctg} x + c.$$

Imponendo $u(0) = y$ si ottiene

$$-\frac{1}{y} = 0 + c$$

da cui $c = -\frac{1}{y}$. Dunque la soluzione con la condizione $u(0) = y$ è:

$$u = \frac{1}{\frac{1}{y} - \operatorname{arctg} x}.$$

se $0 < y < \frac{2}{\pi}$ il denominatore non si annulla mai (in quanto $\operatorname{arctg} x > -\frac{\pi}{2}$) e quindi la soluzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Anche per $y = \frac{2}{\pi}$, la soluzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ma il denominatore tende a 0 per $x \to +\infty$ e quindi la soluzione tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ come richiesto nel punto (d).

Se $y > \frac{2}{\pi}$, il denominatore si annulla per $x = \tan\frac{1}{y}$ e dunque l'intervallo massimale di esistenza contenente il dato iniziale $x = 0$, è l'intervallo $\left(-\infty, \tan\frac{1}{y}\right)$.

Per $y = 0$ abbiamo la soluzione nulla definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Per simmetria possiamo immediatamente concludere che nel caso $-\frac{2}{\pi} \leq y < 0$ (e dunque per ogni y con $|y| \leq \frac{2}{\pi}$) la soluzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Mentre per $y < -\frac{2}{\pi}$ la soluzione è definita sull'intervallo $\left(\tan\frac{1}{y}, +\infty\right)$.

Per il punto (d), come abbiamo già osservato, la soluzione richiesta è

$$u(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x}}$$

e ricordando che per $x > 0$ si ha $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$ e che $\operatorname{arctg} t = t + o(t^2)$ per $t \to 0$, possiamo scrivere, per $x \to +\infty$:

$$u(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x^2})} = \frac{x}{1 + o(\frac{1}{x})} = x \cdot (1 + o(\tfrac{1}{x})) = x + o(1).$$

□

3. (a) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$u'' - u' = 1$$

(b) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$u'' - u' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' - \frac{1}{1+x^2}.$$

Si tratta di equazioni lineari del secondo ordine, a coefficienti costanti, non omogenee.

L'equazione omogenea associata è $u'' - u' = 0$. Il polinomio caratteristico associato è $\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$ e dunque due soluzioni indipendenti sono $u_1 = e^x$ e $u_2 = 1$.

Per risolvere la prima equazione bisogna determinare una soluzione particolare della non omogenea $u'' - u' = 1$. Possiamo usare il metodo di similarità, dovrà infatti esistere una soluzione della forma $u_* = cx$ (in quanto le costanti sono soluzioni dell'omogenea e dunque dobbiamo moltiplicare il polinomio costante c per x). Ma $u_*' = c$ e

$u_*'' = 0$, quindi l'equazione diventa $0 - c = 1$ da cui $c = -1$. Tutte le soluzioni della prima equazioni sono dunque della forma:

$$u(x) = ae^x + b - x, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Per la seconda equazione abbiamo la stessa omogenea associata. Dobbiamo quindi solamente determinare una soluzione particolare. Dalla forma in cui è scritta l'equazione risulta ovvio che se $u' = \frac{1}{1+x^2}$, allora u risolve l'equazione. Dunque una soluzione particolare è $\operatorname{arctg} x$ e tutte le soluzioni della seconda equazione si scrivono nella forma:

$$u(x) = ae^x + b + \operatorname{arctg} x, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$