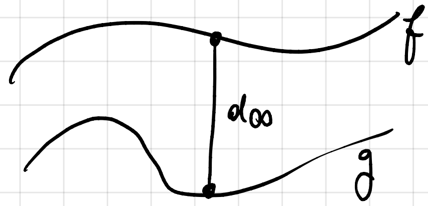
24/03/2025

LEZIONE 65

Spazio metrico, (distanza)   completo (successioni di Cauchy),   teorema di punto fisso $f(x)=x$ Banach-Caccioppoli (funzioni Lipschitz)

Teorema

$X = \mathcal{B}(A,\mathbb{R}) = \{ f: A \to \mathbb{R} \mid f \text{ è limitata} \}$ ("bounded")



$\longrightarrow \exists M>0$ t.c. $\forall x \in A \quad |f(x)| \le M$

$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in A} |f(x)-g(x)|$ (distanza uniforme) $d_\infty(f,0) < +\infty$

X con la distanza d_∞ è uno spazio metrico completo

dim

d_∞ è una distanza:
- $d_\infty(f,g) < +\infty$ perché f,g sono limitate $\Downarrow$ $f-g$ è limitata
- le altre proprietà si verificano facilmente

Vogliamo mostrare che se $f_k \in X$ è di Cauchy, allora $\exists f \in X$ t.c.

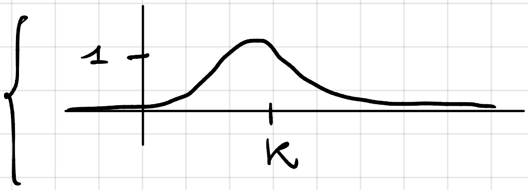
$f_k \rightrightarrows f \quad (d_\infty(f_k,f) \to 0)$ (convergenza uniforme)

Sia dunque f_k di Cauchy: $\forall \varepsilon>0 \ \exists N : \forall k,j > N : d_\infty(f_k,f_j) < \varepsilon$

$\forall x \in A$ $f_k(x)$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ perché $|f_k(x) - f_j(x)| \le d_\infty(f_k,f_j)$

$\mathbb{R}$ completo, $\forall x \in A \ \exists f(x) \in \mathbb{R}$: $f_k(x) \to f(x)$ (convergenza puntuale)

va sempre a 0, ma ha un picco   es.



Verifichiamo che $f_k \rightrightarrows f$

$$|f_k(x) - f(x)| \le |f_k(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f(x)| \le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

(con $|f_k(x) - f_j(x)| \le d_\infty(f_k,f_j)$)

f_k di Cauchy: $\forall \varepsilon>0 \ \forall x\in A \ \exists M$ t.c. $j>M$ $|f_j(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\exists N$ t.c. $k, j > N$ $\; d_\infty(f_k, f_j) < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N: \; k > N \Rightarrow d_\infty(f_k, f) \leq 2\varepsilon$

(tutte le dimostrazioni di completezza usano un metodo simile)

Le funzioni limitate in uno spazio metrico completo sono uno spazio metrico completo rispetto alla distanza uniforme

↓

prendiamo un sottospazio □

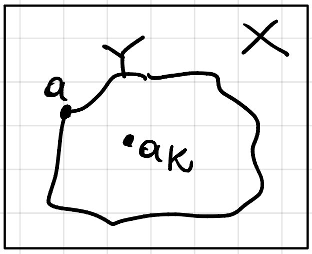
↓

Teorema: sottospazi chiusi di uno spazio completo sono completi

Se X è completo con d, $Y \subseteq X$, Y chiuso $\longrightarrow \begin{cases} a_k \in Y, \; a \in X \\ a_k \to a \Rightarrow a \in Y \end{cases}$

allora Y (con d) è anche lui completo.

rispetto a un ambiente più grande (la completezza riguarda l'insieme stesso)



dim

Sia $a_k \in Y$ di Cauchy in Y

$\Downarrow$

a_k è di Cauchy su X

$\Downarrow \leftarrow X$ completo

$\exists a \in X$ t.c. $a_k \to a$

$\Downarrow \leftarrow Y$ chiuso in X

$a \in Y$

$\Downarrow$

$a \in Y \qquad a_k \to a$ in Y □

Esempio

$Y = C([a,b], \mathbb{R}), \quad X \subseteq B(A, \mathbb{R})$

$Y \subseteq X$ per Weierstrass $\qquad$ Y è chiuso in X?

Prendo $f_k \in Y$ $\quad$ ($f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua)

se $f_k \rightrightarrows g \qquad g : [a,b] \to \mathbb{R}$

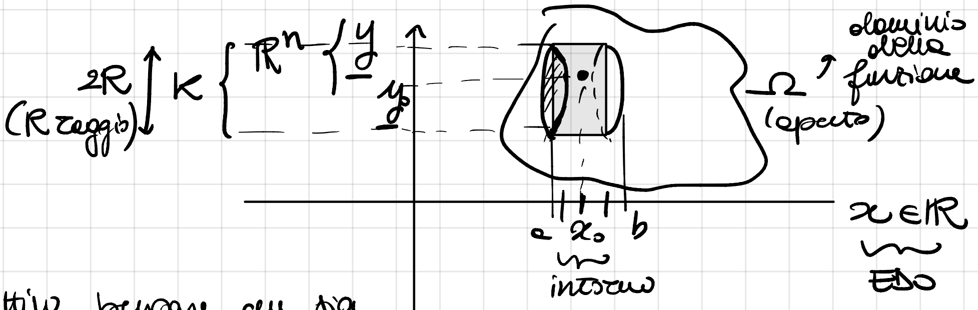
(limite uniforme di f_n continue è continua – già visto)

$\Rightarrow g \in Y$

Teorema (esistenza e unicità locale, di Cauchy-Lipschitz)

Scriviamo in forma vettoriale per ricondurre le eq. di ordine n al primo ordine.

$$\begin{cases} \underline{u}' = \underline{f}(x, \underline{u}(x)) \\ \underline{u}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases} \quad (*)$$



con delle ipotesi su f]

non è riduttivo pensare che sia definita su un cilindro

$$f : [a, b] \times K \to \mathbb{R}^n \qquad \text{con } K = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| \leq R\}$$

$$x_0 \in [a, b]$$

1. f è continua (in $n+1$ variabili)
2. $\exists L > 0$ t.c. $\forall x \in [a, b]$ $\forall \underline{y}_1, \underline{y}_2 \in K$: $\|\underline{f}(x, \underline{y}_1) - \underline{f}(x, \underline{y}_2)\| \leq L \|\underline{y}_1 - \underline{y}_2\|$

"uniforme" (non dipende da x)

costante di Lipschitz

$\rightsquigarrow$ f è Lipschitz rispetto a y uniformemente rispetto a x

Tesi:

$\exists \delta > 0$ t.c. $\forall I \subseteq [a, b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $x_0 \in I$

il problema di Cauchy $(*)$ ha una unica soluzione definita su I

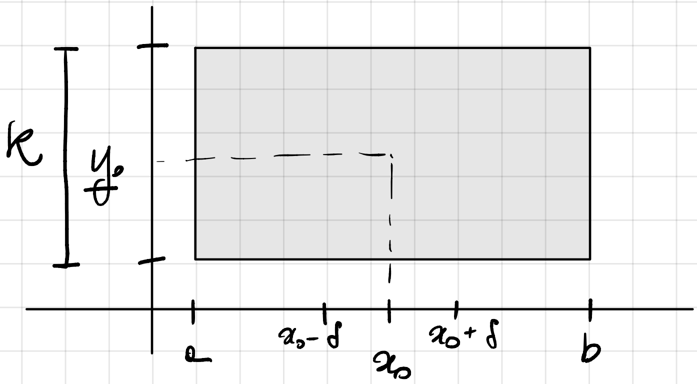
$\exists!$ $u : I \to \mathbb{R}^n$ t.c. $u(x) \in K$ $\forall x \in I$,

$$\underline{u}(x_0) = \underline{y}_0$$

u è derivabile e

$\forall x \in I$ $\underline{u}'(x) = \underline{f}(x, \underline{u}(x))$

(soluzione unica su tutti gli intervalli)



δ: non possiamo escludere che la soluzione abbia un asintoto;
(per l'esistenza è meglio avere intervalli grandi, per l'unicità meglio piccoli)

x_0 potrebbe anche essere un estremo di $[a, b]$ (formulazione con gli intervalli chiusi)

dim

Passo 1 (formulazione integrale, perché migliora la regolarità - funzioni continue diventano derivabili)

$$\begin{cases} u \in C^1(I, K) \\ \text{è soluzione di } (*) \end{cases} \iff \begin{cases} u \in C^0(I, K) \\ u(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} \underbrace{f(t, u(t))}_{g(t)}\, dt \end{cases} \qquad g = f \circ (Id, u)$$

$\Longrightarrow$ unicità

$\Longleftarrow$ esistenza

$\boxed{\Rightarrow}$

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

$$y - y_0 = u(x) - u(x_0) = \int_{x_0}^{x} u'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\, dt$$

$\boxed{\Leftarrow}$

$$u(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} \dots = y_0$$

$u \in C^0$ $\quad t \mapsto f(t, u(t))$ è continua (uso che f è continua)

Allora, per il th. Torricelli-Barrow (fondamentale del calcolo)

$x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\, dt$ è derivabile, e la derivata è $f(x, u(x))$ $\quad u'(x) = f(x, u(x))$ e u' è continua

C^1 non è completo per la distanza uniforme, C^0 sì.

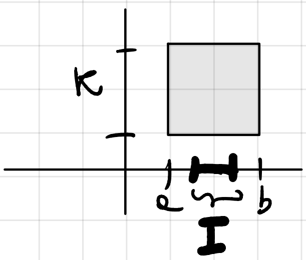
Passo 2

Abbiamo un'eq. di punto fisso, cui si applica il th. delle contrazioni (contratto)

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\, dt \quad \rightsquigarrow \quad u = T(u)$$

Allora definiamo l'operatore T: $\quad T(u)(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\, dt$

$u \in C$ con $X = C(I, K)$



$I \subseteq [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$u \in X \overset{?}{\Longrightarrow} T(u) \in X$

$u \in X, \quad x \in I, \quad x_0 \in I \subseteq [a, b]$

$u(x) \in K \underset{?}{\Longrightarrow} T(u)(x) \in K$

$\hookrightarrow$ itero T

$T(u)(x) \in K$ se $|T(u)(x) - y_0| \leq R$

$\{y \in \mathbb{R}^n : \|y - y_0\| < R\}$ $\quad = \left|\int f(t, u(t))\,dt\right|$

$f : [a,b] \times K \to \mathbb{R}$ è continua; per Weierstrass $\exists M : |f(x,y)| \leq M$

Jensen: $\left|\int_{x_0}^{x} f(t,u(t))\,dt\right| \leq \left|\int |f(t,u(t))|\,dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} M\right| = M|x - x_0|$

$$M|x-x_0| \leq M \cdot \delta \leq R$$

$\rightsquigarrow$ $\delta \leq \frac{R}{M}$ $\qquad T : X \to X$ (se $\delta \leq \frac{R}{M}$)

Passo 3: basta dimostrare che T è una contrazione (serve ipotesi 2 e un'ipotesi su δ)

$$d_\infty(T(u_1), T(u_2)) \overset{?}{\leq} L\, d_\infty(u_1, u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in X$$

$$\sup_{x \in I} |T(u_1)(x) - T(u_2)(x)|$$

$$|T(u_1)(x) - T(u_2)(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t,u_1(t)) - f(t,u_2(t))\,dt\right| \leq \left|\int_{x_0} |f(t,u_1(t)) - f(t,u_2(t))|\,dt\right|$$

$$\leq \left|\int_{x_0}^{x} L|u_1(t) - u_2(t)|\,dt\right| \leq L\left|\int_{x_0}^{x} d_\infty(u_1,u_2)\,dt\right| \leq L|x - x_0|\, d_\infty(u_1,u_2)$$

per ipotesi 2

$$\leq L \cdot \delta \cdot d_\infty(u_1,u_2)$$

$$\leq \tilde{L}\, d_\infty(u_1,u_2)$$

con $\tilde{L} = L \cdot \delta \overset{?}{<} 1$

dunque $d_\infty(T(u_1), T(u_2)) = \sup_{x \in I} |T(u_1)(x) - T(u_2)(x)| \leq \tilde{L} \cdot d_\infty(u_1, u_2)$

se $\delta < \frac{1}{L}$, $\tilde{L} < 1$

$\square$