19/03/2025

LEZIONE 63

Applicazione economica del modello Volterra-Lotka

La quantità di pescato non si ristabilì dopo il periodo di pausa dalla pesca della guerra mondiale, e si notò anche la presenza di predatori. L'idea è di modellizzare la presenza di specie di pesci preda e predatori (modello di competizione): ci si chiede quale sia il modello di crescita -> si utilizza quello di Malthus

$u(x)$: prede al tempo x

$v(x)$: predatori " "

$u'(x) = A u(x)$ → in assenza di predatori, la quantità di preda cresce esponenzialmente

$\downarrow$

$u(x) = C \cdot e^{A(x)}$

Se ci sono predatori, c'è un calo proporzionale alla quantità di predatori. Allo stesso tempo, in assenza di prede, il numero di predatori cala esponenzialmente

$$\begin{cases} u'(x) = A u(x) - B u(x) v(x) & \text{(non lineare)} \\ v'(x) = C v(x) u(x) - D v(x) & \text{(non lineare)} \end{cases}$$

$- D v(x)$: calo dovuto alla morte naturale

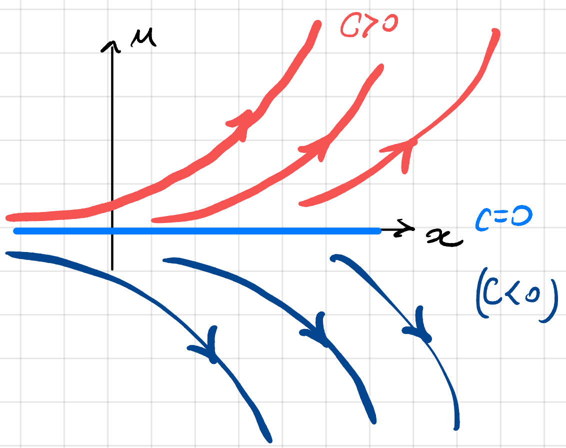
$u \geq 0$, $v \geq 0$ ($C < 0$ non ha senso biologico)

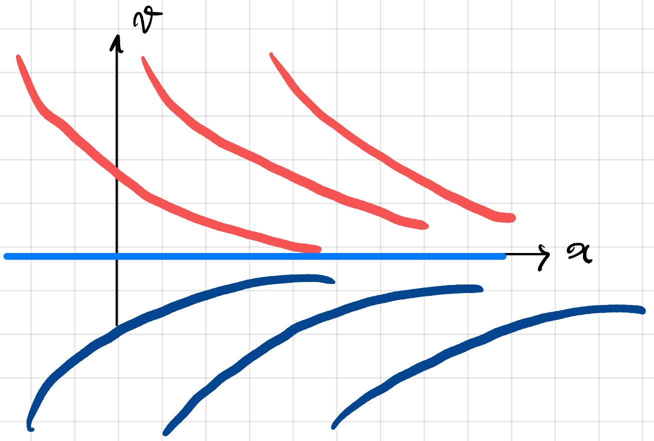
$$\begin{cases} v = 0 \\ u(x) = C \cdot e^{A(x)} \end{cases} \quad \text{(soluzione particolare)}$$

$$\begin{cases} u = 0 \\ v(x) = C e^{-Dx} \end{cases}$$

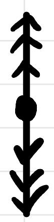
⇝ rappresentare le soluzioni nel caso di un sistema

eq. autonoma: una soluzione traslata nel tempo è sempre soluzione





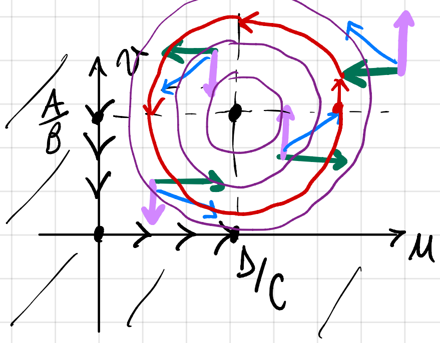
punto critico repulsivo ←



SISTEMI DINAMICI

→ punto critico attrattivo

Per rappresentare u e v contemporaneamente, uso lo spazio delle fasi



Cerchiamo sol. stazionarie (costanti in x)

sono puntini

$$\begin{cases} 0 = (A - Bv)u \\ 0 = (Cu - D)v \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = A/B \\ u = D/C \end{cases}$$

$u = u_0$
$v = v_0$
↓
sono numeri
⇓
sistema algebrica

Cos'altro succede nel primo quadrante?

Si usa il metodo di separazione delle variabili

$$\begin{cases} u'(x) = Au(x) - Bu(x)v(x) \\ v'(x) = Cv(x)u(x) - Dv(x) \end{cases}$$

SISTEMI DINAMICI

$$u'v(Cu - D) = v'u(A - Bv)$$

$$u' \frac{Cu - D}{u} = v' \frac{A - Bv}{v}$$

$$\left[\int \frac{Cu - D}{u} du \right]_{u = u(x)} = \left[\int \frac{A - Bv}{v} dv \right]_{v = v(x)}$$

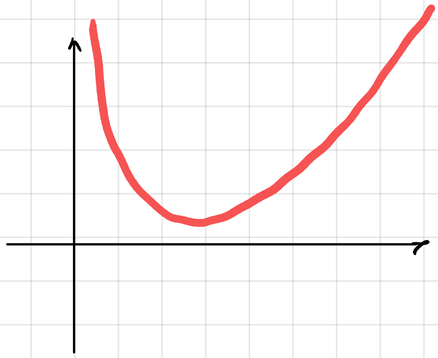
$$Cu - D \ln u = A \ln v - Bv + \text{cost}$$

(curve di livello)

lungo le orbite c'è una funzione che rimane cost. (~ energia)

$$Cu - D \ln u - A \ln v + Bv = \text{cost}$$

le soluzioni del sistema vi rimangono all'interno



$Cu - D \ln u$

funzione coerciva (tende a 0 agli estremi del dominio)

⇝ devo tornare in punto che ha la stessa energia
→ vale per ogni orbita

⇝ le soluzioni sono limitate: $u' \gtrless 0 \Leftrightarrow v \lessgtr \frac{A}{B}$

$v' \gtrless 0 \Leftrightarrow u \gtrless \frac{B}{C}$

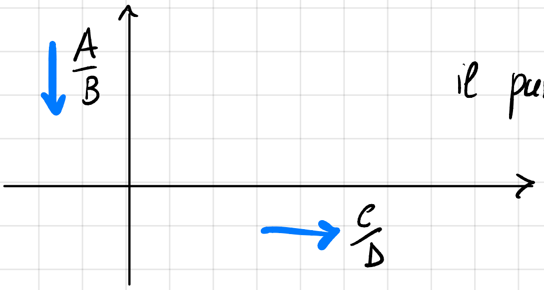
Le soluzioni sono periodiche (prevede delle oscillazioni attorno al valore critico che possiamo immaginare come la media)

Se introduciamo la pesca intensiva, il punto critico si sposta

$$\begin{cases} u' = Au - Buv - Eu \\ v' = Cvu - Dv - Ev \end{cases}$$

diminuisce il coefficiente A

aumenta il coefficiente D

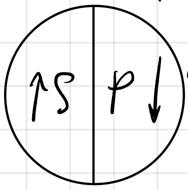


il punto critico si sposta in questo modo e spiega l'apparente paradosso

Il modello è stato utilizzato dall'economista di Harvard Richard Godwin per la questione della ciclicità nel rapporto tra capitale e lavoro negli anni '70 in America. I modelli standard in economia non hanno una crescita lineare, però convergono ad una sorta di equilibrio (visione neoclassica). C'è poi una visione keynesiana secondo cui ci sono delle fluttuazioni inerenti al sistema che derivano dagli squilibri tra offerta e domanda: ci sarebbe una funzione essenziale nel governo per stabilizzare questo tipo di ciclo. Un'altra versione, marxiana, ci dice che il sistema è intrinsecamente instabile e politiche di stabilizzazione sarebbero inutili perchè esiste un conflitto irrisolvibile tra capitale e lavoro.

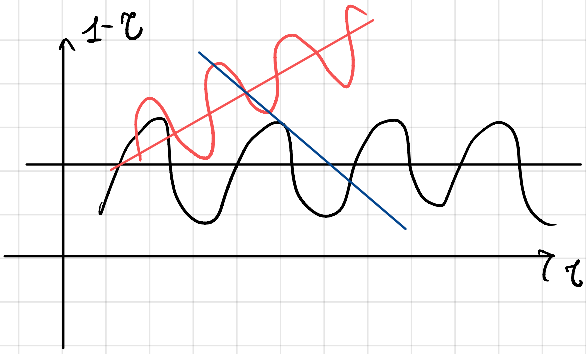
Il modello di Godwin si inserisce tra la seconda e terza versione: l'oscillazione è caratteristica del sistema capitalistico e segue una dinamica ciclica inevitabile, senza tendenza alla linearità e all'equilibrio.

Lavoro: predatore
Profitti: preda



⇝ le imprese investono di meno

I salari crescono quando l'occupazione è alta (più lavoratori che possono permettersi di chiedere aumenti), ma allo stesso tempo riducono il profitto



dinamica ciclica costante, in crescita o decrescita

$$\boxed{\frac{d\tau}{dt} = \tau(s - v - \rho v)}$$

τ: tasso di profitto
u: quota dei salari
v: % forza lavoro occupata
s: propensione al risparmio dei capitalisti − % profitto → investimento
ρ: sensibilità dei salari all'occupazione
↓
rispondono forte o meno velocemente ai cambiamenti

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = v(\rho v - \tau)}$$

Prof. Daniele Tosi