ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 61 — 12.3.2025

Eq. lineari **non** omogenee.

$$L[u] = b \qquad L[u] = u^{(n)} + a_{n-1}\, u^{(n-1)} + \dots + a_1\, u' + a_0\, u$$

$b = b(x)$ "termine noto" $\qquad a_k = a_k(x)$ ↑ coefficienti $\qquad u = u(x)$

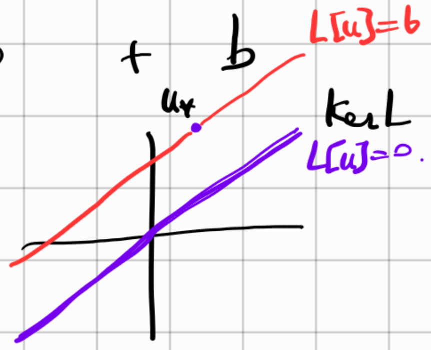
Ricordiamo:
- bisogna trovare tutte le soluzioni della omogenea associata: $L[u]=0$
- Basta una soluzione (particolare) della non omogenea: $L[u_*]=b$

Allora tutte le soluzioni della non omogenea sono della forma:

$$u = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n + u_*$$

dove $u_1 \dots u_n$ sono una base di soluzioni della omogenea: $L[u_k]=0$
(u_k sono indipendenti)
$c_k \in \mathbb{R}$ coefficienti
u_* soluzione particolare $L[u_*]=b$.

Infatti $$L[u] = c_1 L[u_1] + \dots + c_n L[u_n] + L[u_*]$$
$$= 0 + \dots + 0 + b$$



Come trovare una soluzione particolare?

Esempio $\quad u'' - 3u' + 2u = 1$

- risolviamo l'omogenea: $\quad P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

tutte le sol. dell'omogenea:

$$\longrightarrow \quad u_0(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) \qquad u_1 = e^x$$

$$u_2 = e^{2x}$$

$$= c_1 \cdot e^x + c_2 e^{2x}.$$

- $u_*(x) = \frac{1}{2}$ è soluzione per verifica diretta!

$$u_*' = 0 \quad u_*'' = 0$$

Tutte le sol. della equazione data (non omogenea) sono:

$$u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}.$$

Verifica: $\quad u'(x) = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} + 0$

$$u''(x) = c_1 e^x + 4c_2 e^{2x}$$

$$u'' - 3u' + 2u = c_1 e^x \cdot [\cancel{1 - 3 + 2}] + c_2 e^{2x} [\cancel{4 - 6 + 2}]$$

$$+ 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 1.$$

Esempio 2 $\quad u'' - 3u' + 2u = x \qquad [x = x \cdot e^{0 \cdot x}]$

$u_*(x) = mx + q \quad \leftarrow$ idea

$u_*'(x) = m$

$u_*''(x) = 0 \qquad\qquad 0 - 3m + 2(mx + q) = x$

$$(2m-1)x + 2q - 3m = 0$$

$$\begin{cases} 2m-1=0 \\ 2q-3m=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2m=1 \\ 2q-3m=0 \end{cases} \quad \begin{cases} m=\frac{1}{2} \\ q=\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$u_f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

⚠ $u'' + 2u' + 1 = 0$ è non omogenea.

$P(\lambda) \cancel{=} \lambda^2 + 2\lambda + 1$ **NO!**

$u'' + 2u' = -1 \qquad P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda$

Abbiamo 2 metodi generali per trovare una soluzione particolare:

1. Similarità: meno generale ma più semplice
2. Variazione delle costanti: più generale ma più complicato.

1. Metodo di similarità

se l'eq. è a coefficienti costanti

$L[u] = b \qquad L[u] = P(D)[u]$

dove $P = P(\lambda)$ è il polinomio associato all'equazione

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

$$P(D) = (D - \lambda_1 I)^{m_1} \cdots (D - \lambda_k)^{m_k}$$

Se u è della forma: $u(x) = \underline{q(x) \cdot e^{\mu x}}$

$$\underbrace{(D-\lambda)}[u] = \begin{cases} q'(x) e^{\mu x} & \text{se } \lambda = \mu \\ \tilde{q}(x) e^{\mu x} & \text{se } \lambda \neq \mu \end{cases}$$

con $\tilde{q}$ polinomio dello stesso grado di q.

Se $\mu \neq \lambda_j$ $\quad j=1 \dots k$ $\qquad u_* = q(x) e^{\mu x}$

$$L[u_*] = \tilde{q}(x) e^{\mu x}$$

Se $b(x)$ è della forma $\tilde{q}(x) e^{\mu x}$ trovo una soluzione $u_*(x) = q(x) e^{\mu x}$

dove q è un polinomio dello stesso grado di $\tilde{q}$.

Esempio $\quad u'' - 3u' + 2u = \underbrace{(x+1)}e^{-x}$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-2)(\lambda-1)$$

$$\lambda_1 = 2 \quad m_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 1 \quad m_2 = 1$$

Cerco u_* della forma: $(mx+q)e^{-x}$

$$u_* = (mx+q)e^{-x}$$
$$u_*' = (m - mx - q) \cdot e^{-x}$$
$$u_*'' = (-m - m + mx + q) e^{-x}$$

$$L[u_*] = u_*'' - 3u_*' + 2u_* = (-2m + q + \underline{mx} - 3m + 3\underline{mx} + 3q + \underline{2mx} + 2q) e^{-x}$$

$$= (6mx - 5m + 6q)\, e^{-x} \overset{!}{=} (x+1)\, e^{-x}$$

$$\begin{cases} 6m = 1 \\ 6q - 5m = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} m = \frac{1}{6} \\ q = \frac{1+5m}{6} = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36} \end{cases}$$

$u_* = \frac{6x+11}{36} e^{-x}$ è una soluzione particolare

Tutte le soluzioni sono: $\boxed{u(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{6x+11}{36} e^{-x}}$.

Cosa facciamo se $b(x) = \tilde{q}(x)\, e^{\mu x}$ e $P(\mu) = 0$

$$(D-\mu)^m \Big[\underbrace{q(x) e^{\mu x}}_{u_*} \Big] = q^{(m)}(x)\, e^{\mu x}$$

Per trovare $u_* = q(x)\, e^{\mu x}$ tale che $L[u_*] = b(x)$

dovrò avere $\deg q = \deg \tilde{q} + m$

dove m è la molteplicità di μ come radice di P.

MA basta cercare $q(x)$ della forma $p(x) \cdot x^m$ con $\deg p = \deg \tilde{q} = d$

$$p(x)\, x^m = a_d x^{m+d} + a_{d-1} x^{m+d-1} + \ldots + a_1 x^{m+1} + a_0 x^m$$

altri termini sarebbero inutili perché si annullano dopo m derivate.

Esempio $\quad u'' - 3u' + 2u = x^2 e^x \qquad \mu = 1$

$$d = 2$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1, & m_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2, & m_2 = 1 \end{cases}$$

Cerco una soluzione della forma:

$$u_*(x) = \underbrace{(ax^2 + bx + c)}_{\text{grado } d} \cdot \overbrace{x}^{x^{m_1}} e^x$$

$$u_*(x) = (ax^3 + bx^2 + cx)e^x$$

$$u_*'(x) = (3ax^2 + 2bx + c + ax^3 + bx^2 + cx)e^x$$

$$= (ax^3 + (3a+b)x^2 + (2b+c)x + c)e^x$$

$$u_*''(x) = (3ax^2 + (6a+2b)x + 2b + c + ax^3 + (3a+b)x^2 + (2b+c)x + c)e^x$$

$$= (ax^3 + (6a+b)x^2 + (6a+4b+c)x + 2b+2c)e^x$$

$$u_*'' - 3u_*' + 2u_* = \Big[\cancel{(a - 3a + 2a)x^3} + (6a + \cancel{b} - 9a - \cancel{3b} + \cancel{2b})x^2 +$$

$$+ (6a + 4b + \cancel{c} - 6b - \cancel{3c} + \cancel{2c})x$$

$$+ 2b + 2c - 3c\Big]e^x \overset{!}{=} x^2 e^x$$

$$\begin{cases} -3a = 1 \\ 6a - 2b = 0 \\ 2b - c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = -1 \\ c = -2 \end{cases}$$

$$u_*(x) = \left(-\frac{1}{3}x^2 - x - 2\right) x e^x$$
$$= -\frac{x^3+3x^2+6x}{3} e^x$$

$$u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - \frac{x^3+3x^2+6x}{3} e^x$$
$$= c_2 e^{2x} - \frac{x^3+3x^2+6x-3c_1}{3} e^x$$

Ora siamo in grado di risolvere: $L[u] = q(x) e^{\mu x}$

$\boxed{\text{MA}}$ PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE

$$L[u_*] = b_*$$
$$L[u_{**}] = b_{**}$$

$$L[u_* + u_{**}] = L[u_*] + L[u_{**}] = b_* + b_{**}$$

Esempio $\quad u'' - 3u' + 2u = x + e^{-x}$

Risolvo separatamente $\quad u_*'' - 3u_*' + 2u_* = x$

e $\quad u_{**}'' - 3u_{**}' + 2u_{**} = e^{-x}$

allora $u_* + u_{**}$ sarà una sol. particolare dell'equazione data.

Esercizio

$$u'' - 3u' + 2u = \cos x$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2} \\ \operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = \operatorname{Re} e^{ix} = \frac{e^{ix} + \overline{e^{ix}}}{2} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \operatorname{Im} e^{ix} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

Cerco una soluzione della forma: $u_* = a\cos x + b \operatorname{sen} x$.

$$\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e^{ix}, e^{-ix}\} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\sin, \cos\}$$

$$u_* = a\cos x + b \operatorname{sen} x$$
$$u_*' = -a\sin x + b\cos x$$
$$u_*'' = -a\cos x - b\sin x$$

$$u_*'' - 3u_*' + 2u_* = (-a - 3b + 2a)\cos x + (-b + 3a + 2b)\sin x$$
$$= (a - 3b)\cos x + (3a + b)\sin x \stackrel{!}{=} \cos x = f(x)$$

$$\begin{cases} a - 3b = 1 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + 9a = 1 \\ b = -3a \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ b = -\frac{3}{10} \end{cases}$$

$$u_* = \frac{1}{10}\left[\cos x - 3\sin x\right]$$

$$u(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x.$$