ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 60 - 10.3.2025

Equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti di ordine n.

$$L[u] = 0 \qquad L[u] = \sum_{k=0}^{n} a_k u^{(k)} \qquad a_n \neq 0$$

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$$

Se $P(\lambda)$ ha n radici reali, anche con molteplicità sappiamo trovare una base con n soluzioni indipendenti

Esempio

$$u'''' + 3u''' + 3u'' + u' = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$$

$$= \lambda(\lambda+1)^3 = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}$$

1 1
1 2 1
1 3 3 1

$\rightarrow \lambda_1 = 0 \quad m_1 = 1$

$\rightarrow \lambda_2 = -1 \quad m_2 = 3$

4 = deg P = ordine della equazione.

λ_1: $u_1 = e^{\lambda_1 \cdot x} = 1$

λ_2: $u_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{-x}$

$u_3 = x \cdot e^{\lambda_2 x} = x e^{-x}$

$u_4 = x^2 \cdot e^{\lambda_2 x} = x^2 e^{-x}$

$$\{\text{soluzioni}\} = \ker L = \operatorname{span}\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$$

u è soluzione $\iff \exists\, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ tali che

$$u(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + c_4 x^2 e^{-x} = c_1 + (c_2 + c_3 x + c_4 x^2) e^{-x}.$$

Teo (Fondamentale dell'algebra)

Se P è un polinomio di grado n a coefficienti complessi allora esistono $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{C}$, $\exists c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ tali che:

$$P(z) = c\,(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\dots(z-\lambda_n).$$

In effetti questo ci permette di risolvere in $\mathbb{C}$: $\overset{\mathbb{R}\to\mathbb{C}}{x \mapsto u(x)}$ le eq. differenziali lineari a coefficienti costanti.

Es [oscillatore armonico] $u'' = -\frac{k}{m}u$ k, m costanti positive.

$$L[u] = u'' + \frac{k}{m}u = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{k}{m} = \lambda^2 - \left(-\frac{k}{m}\right)$$

Su $\mathbb{C}$ $\quad P(\lambda) = \left(\lambda + \sqrt{\frac{k}{m}}\,i\right)\left(\lambda - \sqrt{\frac{k}{m}}\,i\right)$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,i \qquad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{k}{m}}\,i$$

Ho due sol. indipendenti:

$$u_1 = e^{\sqrt{\frac{k}{m}}\,ix}, \quad u_2 = e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}\,ix} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

tutte le soluzioni complesse sono:

$$u(x) = c_1 e^{i\omega x} + c_2 e^{-i\omega x}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

$$u(x) = c_1\left(\cos \omega x + i \operatorname{sen} \omega x\right) + c_2\left(\cos \omega x - i \operatorname{sen} \omega x\right)$$

$$= (c_1 + c_2) \cos \omega x + i\,(c_1 - c_2) \operatorname{sen} \omega x$$

$$= d_1 \underline{\cos \omega x} + d_2 \underline{\sin \omega x}.$$

$$\begin{cases} d_1 = c_1 + c_2 \\ d_2 = i(c_1 - c_2) \end{cases} \qquad \left[\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \text{ è invertibile} \right]$$

Idea: tutte le soluzioni reali saranno:

$$u(x) = d_1 \cos \omega x + d_2 \sin \omega x$$

con $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$.

Teorema Siano $u_1 \dots u_n$ funzioni reali linearmente indipendenti

sia $u = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \qquad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$.

Allora u è reale $(u(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R})$

$$\Updownarrow$$

$c_1 \dots c_n$ sono tutti reali

dim "$\Uparrow$" è ovvia.

"$\Downarrow$" $\qquad z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0$

$$0 \overset{\text{IPOTESI}}{=} u(x) - \overline{u(x)} = \left(c_1 u_1(x) + \dots + c_n u_n(x)\right) - \overline{\left(c_1 u_1(x) + \dots + c_n u_n(x)\right)}$$

$$= c_1 u_1(x) + \dots + c_n u_n(x) - \left(\bar{c}_1 u_1(x) + \dots + \bar{c}_n u_n(x)\right)$$

$$u_k \in \mathbb{R} \iff \overline{u_k(x)} = u_k(x)$$

$$= (c_1 - \bar{c}_1) u_1(x) + \dots + (c_n - \bar{c}_n) u_n(x)$$

ma $u_1 \dots u_n$ sono indipendenti: $c_k - \bar{c}_k = 0$

$\Rightarrow c_k \in \mathbb{R}$ □

MA sin ωx e cos ωx sono indipendenti?

$$\begin{cases} e^{i\omega x} = \cos \omega x + i \operatorname{sen} \omega x \\ e^{-i\omega x} = \cos \omega x - i \operatorname{sen} \omega x \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} e^{i\omega x} \\ e^{-i\omega x} \end{pmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{è invertibile.}}}{\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \cos \omega x \\ \sin \omega x \end{pmatrix}$$

$\{e^{i\omega x}, e^{-i\omega x}\}$ e $\{\cos \omega x, \sin \omega x\}$

sono due basi dello stesso spazio vettoriale complesso.

Il teorema di "indipendenza": $\{x^k e^{\lambda x} : k = 0 \dots m, \lambda \in \{\lambda_1 \dots \lambda_n\}\}$

è linearmente indipendente anche se $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{C}$.

In generale se $\lambda = \mu + i\omega$ $\lambda \in \mathbb{C}$ $\mu \in \mathbb{R}$ $\omega \in \mathbb{R}$

$$e^{\lambda x} = e^{(\mu + i\omega)x} = e^{\mu x}(\cos \omega x + i \operatorname{sen} \omega x)$$

$$\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e^{i\omega x}, e^{-i\omega x}\} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\cos \omega x, \sin \omega x\}$$

$$\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e^{\lambda x}, e^{\bar{\lambda} x}\} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e^{\mu x} \cos \omega x, e^{\mu x} \sin \omega x\}$$

$$\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{x^m e^{\lambda x}, x^m e^{\bar{\lambda} x}\} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{x^m e^{\mu x} \cos \omega x, x^m e^{\mu x} \sin \omega x\}$$

Ma perché se λ è radice di P anche $\bar{\lambda}$ dovrebbe esserlo?

Teorema Se P è un polinomio a coefficienti reali

se $P(\lambda)=0$ anche $P(\bar{\lambda})=0$.

dim
$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad a_k \in \mathbb{R}.$$

$$P(\bar{\lambda}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{\lambda}^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \, \bar{\lambda}^k \overset{\downarrow}{=} \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \bar{\lambda}^k$$

$$\boxed{\ast} \qquad = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k} = \overline{P(\lambda)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi}}}{\bar{0}} = 0 \qquad \square$$

Nota: inoltre hanno la stessa molteplicità.

Esempio
$$u'''' + 2u'' + u = 0$$

$$P(\lambda) = (\lambda^2+1)^2 = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1$$
$$= (\lambda+i)^2(\lambda-i)^2$$

$\lambda_1 = i \qquad m_1 = 2$

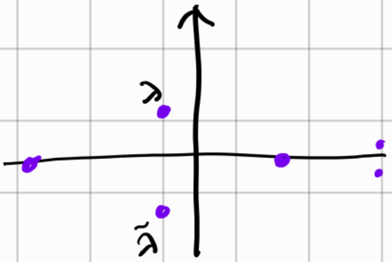
$\lambda_2 = -i \qquad m_2 = 2$

Le soluzioni complesse sono: $u(x) = (c_1 + c_2 x)e^{ix} + (c_3 + c_4 x)e^{-ix}$

Le soluzioni reali sono: $u(x) = (d_1 + d_2 x)\cos x + (d_3 + d_4 x)\sin x$.

⊗ le radici complesse di un polinomio reale sono simmetriche rispetto l'asse reale:

i coefficienti sono reali



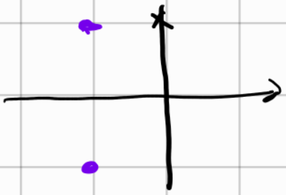
Esempio

$$u'' + 2u' + 2u = 0$$

[vedi oscillatore armonico smorzato]

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

$$\lambda_{12} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i \begin{array}{l} \nearrow -1+i = \lambda_1 \\ \searrow -1-i = \lambda_2 \end{array}$$



le soluzioni complesse sono:

$$u(x) = c_1 e^{(-1+i)x} + c_2 e^{(-1-i)x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

le soluzioni reali sono:

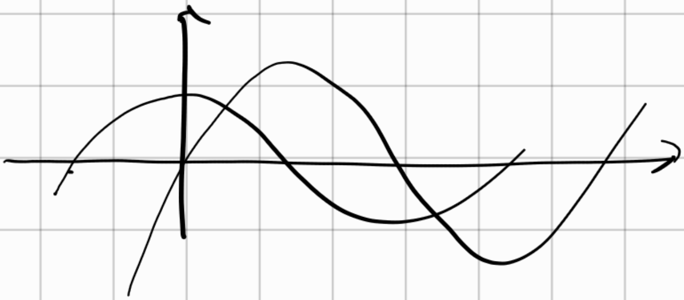
$$\rightarrow \quad u(x) = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$= e^{-x} \left(c_1 \cos x + c_2 \sin x \right)$$

OSSERVAZIONE

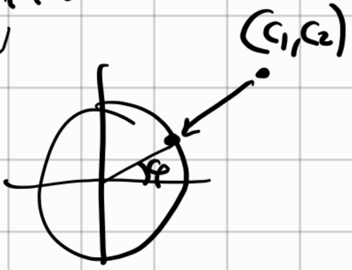
$$c_1 \cos x + c_2 \sin x = r \cos(x - \varphi)$$

$$= r \sin(x - \psi)$$



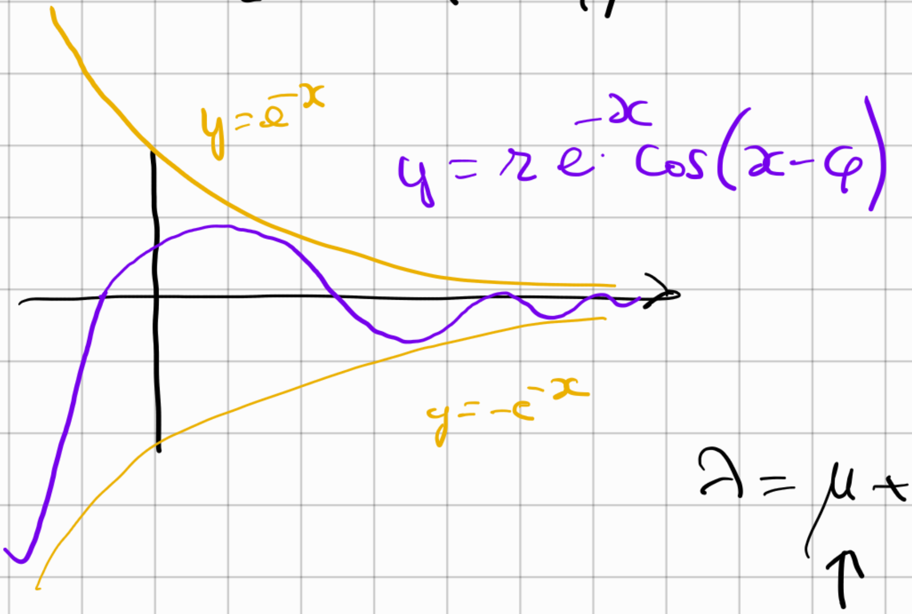
infatti $c_1 \cos x + c_2 \sin x = r \left[\underbrace{\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} \cos x + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}}_{} \sin x \right]$

$\boxed{r = \sqrt{c_1^2+c_2^2}}$



$= r \left(\cos\varphi \cos x + \sin\varphi \sin x \right)$

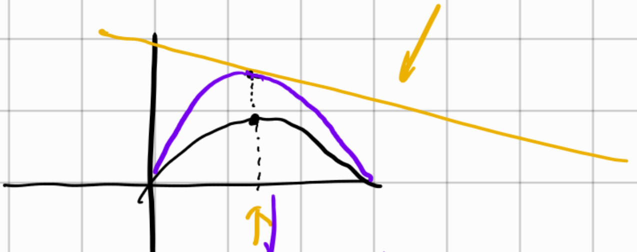
$= r \cdot \cos(x - \varphi)$ $\square$

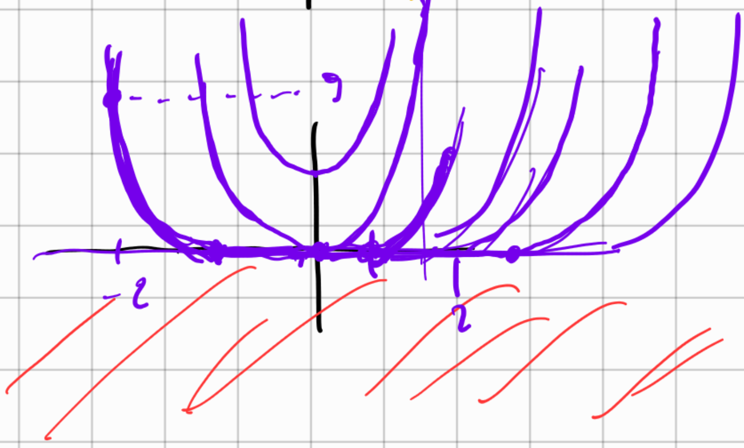


frequenza

$\lambda = \mu + i\omega$

smorzamento se $\mu < 0$





$u' = 4x\sqrt{u(x)}$