ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 59 - 7.3.2025

Equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti di ordine n.

$a_k \in \mathbb{R}$ $\quad a_n \neq 0$

$$L[u](x) = a_n \cdot u^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot u^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 \cdot u'(x) + a_0 \cdot u(x) = 0 \qquad (*)$$

$$(L[u]=0)$$

POLINOMIO ASSOCIATO

$$P(\lambda) = a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

Abbiamo visto che se λ_1 è radice del polinomio $(P(\lambda_1)=0)$ allora $u_1(x) = \underline{e^{\lambda_1 \cdot x}}$ è soluzione di $(*)$

<u>Fatto</u> (lo vedremo)

<u>Teo</u> L'insieme delle soluzioni di $(*)$ è uno

(#) <u>spazio vettoriale</u> di dimensione n.

(questo è già noto)

<u>Obiettivo</u>: trovare una BASE dello spazio delle soluzioni.

Abbiamo trovato una sol. per ogni radice di P.

<u>Problemi</u>: (1) P ha n radici in $\mathbb{C}$ ma non sempre in $\mathbb{R}$ $\qquad \lambda^2+1$

(2) P può avere radici multiple $\qquad (\lambda-1)^2$

PROBLEMA 2

$$[\,u^{(2)} - 2u^{(1)} + u^{(0)}\,]$$

Esempio $\quad u'' - 2u' + u = 0$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = \underbrace{(\lambda-1)^2}$$

$\lambda_1 = 1 \qquad m_1 = 2$

radice $\qquad$ molteplicità

$[\,(\lambda-\lambda_1)^{m_1}$ divide $P(\lambda)\,]$

Una soluzione dell'equazione è $\quad u_1 = e^{\lambda_1 x} = e^x$

verifica $\quad u_1 = e^x, \quad u_1' = e^x, \quad u_1'' = e^x$

$$u_1'' - 2u_1' + u_1 = e^x - 2e^x + e^x = (1-2+1)e^x = 0$$

Scriviamo l'equazione usando l'operatore D. $\quad Du = u'$.

$$D^2 u - 2Du + u = 0 \qquad u = Iu = D^0 u$$

$$D^2 u - 2D^1 u + D^0 u = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned}(A+B)[v] &= A[v] + B[v]\\ (c\cdot A)[v] &= c(A[v])\end{aligned}}$$

$$(D^2 - 2\cdot D^1 + D^0)[u] = 0$$

$$P(D)[u] = 0$$

$$(D-I)(D-I)[u] = 0$$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$

$P(\lambda) = \underbrace{(\lambda-1)(\lambda-1)}$

$$(D-I)[\,u' - u\,] = 0$$

$\lambda \quad u' - u = 0 \qquad u_1(x) = e^x.$

$$\square \xrightarrow{D-I} \square \xrightarrow{D-I} \boxed{0}$$

$$u \longrightarrow ce^x \longrightarrow 0$$

Cerco u tale che $(D-I)[u]=e^x$.

$$u'-u=e^x$$ (ricordiamo le eq. lineari del I ordine)

$$u'e^{-x}-ue^{-x}=e^xe^{-x}$$

$$(u\cdot e^{-x})'=1 \qquad u\cdot e^{-x}=x+\cancel{c}$$

$$u(x)=x\cdot e^x.$$

[$u_1(x)=e^x$ e $u_2(x)=xe^x$ sono indipendenti perché altrimenti $u_2=c\cdot u_1$ cioè $\forall x$: $x\cancel{e^x}=c\cancel{e^x}$
$c=x$.
assurdo]

$u(x)=c_1e^x+c_2xe^x$ al variare di $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

è uno spazio vettoriale di dimensione 2.

|| Se ci fidiamo del Teorema (#) abbiamo trovato tutte le soluzioni.

(*) $\qquad L[u]=0 \qquad L=P(D)$

$$L=P(D) \qquad \operatorname{Ker} L=\operatorname{span}\{u_1,u_2\}$$

$$u_1(x)=e^x,\ u_2=xe^x.$$

Più in generale se λ_k ha molteplicità m_k (come radice di $P(\lambda)$)

$$u_1 = e^{\lambda_k x}$$
$$u_2 = x e^{\lambda_k x}$$
$$\vdots$$
$$u_{m_k} = x^{m_k-1} \cdot e^{\lambda_k x}$$

sono m_k soluzioni indipendenti della eq (*).

$$c_1 u_1 + \dots + c_{m_k} u_{m_k} = \left(c_1 + c_2 x + \dots + c_{m_k} x^{m_k-1}\right) e^{\lambda_k x}.$$
$$= q(x)\, e^{\lambda_k x}$$

con $q(x)$ polinomio di $\deg q < m_k$.

<u>Dimostrazione generale</u> $\rightarrow P(D)[u] = 0$

Se λ_k è radice di $P(\lambda)$ con molteplicità m_k

$$P(\lambda) = Q(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

$$L = P(D) = Q(D) \cdot (D - \lambda_k \cdot I)^{m_k}$$

$u(x) = x^{\ell} e^{\lambda_k x}$ è soluzione?

$$(D - \lambda_k \cdot I)[u] = u' - \lambda_k u$$

In generale $(D-\lambda)\left[q(x) \cdot e^{\lambda x}\right] = q'(x) e^{\lambda x} + \cancel{\lambda q(x) e^{\lambda x}} - \cancel{\lambda q(x) e^{\lambda x}}$
$$= q'(x)\, e^{\lambda x}.$$

Raccogliamo questa osservazione:

Oss $[D-\lambda][q(x)\cdot e^{\lambda x}] = q'(x)e^{\lambda x}$

$$(D-\lambda_k I)^{m_k}[x^\ell \cdot e^{\lambda_k x}] = \left(D^{m_k} x^\ell\right)\cdot e^{\lambda_k x}$$
$$= 0 \cdot e^{\lambda_k x}$$

se $\ell < m_k$ $\qquad \ell = 0, 1, \dots, m_k - 1$ $\qquad \square$

Se fattorizziamo $P(\lambda) = \underbrace{(\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdots\cdots (\lambda-\lambda_k)^{m_k}}_{m_1+m_2+\dots+m_k = \deg P}$

quindi le soluzioni che abbiamo trovato:

$$\boxed{\underset{u_1}{e^{\lambda_1 x}},\ \underset{x u_1}{x e^{\lambda_1 x}} \dots,\ x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x},\ \underset{u_2}{e^{\lambda_2 x}} \dots,\ \dots, e^{\lambda_k x}, \dots}$$

sono $n = \deg P$ = ordine della equazione.

Teorema queste funzioni sono linearmente indipendenti

Corollario

$$\text{span}\{u_1, xu_1 \dots, u_2, xu_2, \dots, u_k, xu_k \dots x^{m_k-1}u_k\}$$

ha dimensione n.

dim [Teorema]

supponiamo di avere

Sia $u_k = e^{\lambda_k x}$

$u_1,\ x u_1,\ x^2 u_1 \dots,\ u_2,\ x u_2, \dots$

dipendenti. Prendiamo una combinazione lineare

con $\sum \underbrace{c_i^j x^j}\, e^{\lambda_i x} = 0 \quad \forall x$

vogliamo mostrare che $c_i^j = 0 \quad \forall i \forall j$.

$$\left.\begin{array}{c} e^{\lambda_1 x} \\ x e^{\lambda_1 x} \end{array}\right| 2 \qquad \left.e^{\lambda_2 x}\right| 1 \qquad \left.\begin{array}{c} e^{\lambda_3 x} \\ x e^{\lambda_3 x} \\ x^2 e^{\lambda_3 x} \end{array}\right| 3$$

$$\forall x: \underbrace{v = \sum_{i=1}^{k} P_i(x) \cdot e^{\lambda_i x}} = 0 \qquad \underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_k}_{k \text{ radici}}$$

Mi concentro su λ_1.

Applico $(D-\lambda_1)^{m_1}$ a v

Ricordiamo $(D-\lambda)\left[q(x)\, e^{\lambda x}\right] = q'(x) e^{\lambda x}$

e osserviamo $(D-\mu)\left[q(x) \cdot e^{\lambda x}\right] = q'(x) e^{\lambda x} + \lambda q(x) e^{\lambda x} - \mu q(x) e^{\lambda x}$

con $\lambda \neq \mu$

$$= \underbrace{\left((\lambda-\mu) q(x) + q'(x)\right)}_{\tilde{q}} e^{\lambda x}$$

$\deg q' = \deg q - 1$

$\deg \tilde{q} = \deg q$.

$$(D-\lambda_1)^{m_1}[v] = D^{m_1} P_1(x) \cdot e^{\lambda_1 x} + \sum_{i=2}^{k} \tilde{P}_i(x) e^{\lambda_i x}$$

$\deg P_1 = m_1$

nuovi diversi dello stesso grado

$P_1(x) = k_1 x^{m_1} + \dots$

$m_1!\, k_1 \neq 0$

se ora applico $(D-\lambda_i)^{m_i+1}$ per $i=2\dots k$

$$(D-\lambda_i)^{m_i+1}\left[\tilde{P}_i(x)\, e^{\lambda_i x}\right] = \cancel{\left(D^{m_i+1} P_i(x)\right)} e^{\lambda_i x} = 0$$

$$(D-\lambda_i)^{m_i+1}\left[\underbrace{m_1!\, k_1}\cdot e^{\lambda_1 x}\right] \quad \text{per } i>1$$

$$= \tilde{k}_1\, e^{\lambda_1 x}$$

$$\uparrow \ \tilde{k}_1 \neq 0$$

<u>conclusione</u>:

$$\tilde{k}_1\, e^{\lambda_1 x} = 0 \Rightarrow \tilde{k}_1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P_1 = 0$$

Ripeto lo stesso ragionamento su $P_2, P_3 \dots$

$\Rightarrow c_i^j = 0 \quad \forall i \ \forall j$ □

<u>Esempi</u> $e^x,\ xe^x,\ e^{3x},\ x^2e^{3x},\ e^{-x}$.

sono tutti indipendenti

quindi $\text{span}\{e^x, xe^x, e^{3x}, x^2e^{3x}, e^{-x}\}$

ha dimensione 5.

<u>Esercizio</u> $e^x,\ xe^x,\ (x+\pi)e^x$ <u>non</u> sono

indipendenti.

<u>Riflessione</u> tutto questo è ugualmente valido su $\mathbb{C}$.