ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 57 - 3.3.2025

Eq. lineari (non omogenea) del primo ordine in forma normale

$$u'(x) + a(x)\cdot u(x) = b(x)$$

$$u \overset{L}{\mapsto} u' + a\cdot u$$

funzione

$$L[\lambda u + \mu v] = \lambda L[u] + \mu L[v]$$

$L[u] = b$ ← non omogenea

$L[u] = 0$ ← omogenea

Metodo risolutivo:

idea: ricondursi alla derivata di un prodotto

trucco: moltiplicare per un opportuno esponenziale: (FATTORE INTEGRANTE)

$$u'(x)\, e^{A(x)} + a(x)\, e^{A(x)}\, u(x) = b(x)\, e^{A(x)}$$

scelgo $A(x) \in \int a(x)\,dx \Rightarrow A'(x) = a(x)$

$$\left(u(x)\cdot e^{A(x)}\right)' = b(x)\, e^{A(x)}$$

$$u(x)\, e^{A(x)} \in \int b(x)\, e^{A(x)}\,dx$$

$$u(x) \in e^{-A(x)} \cdot \left[\int b(t)\, e^{A(t)}\,dt\right]_{t=x}$$

Esempio

$$\boxed{u' + \cos x \cdot u = 0}$$

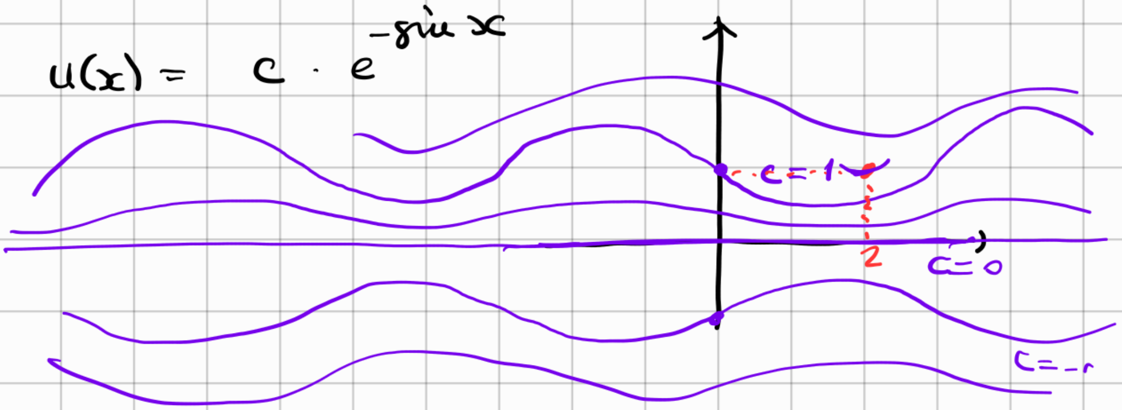
$$u' \cdot e^{\sin x} + \cos x\, e^{\sin x} \cdot u = 0$$

$$\left(u \cdot e^{\sin x}\right)' = 0$$

$$\boxed{e^{A(x)} \neq 0}$$

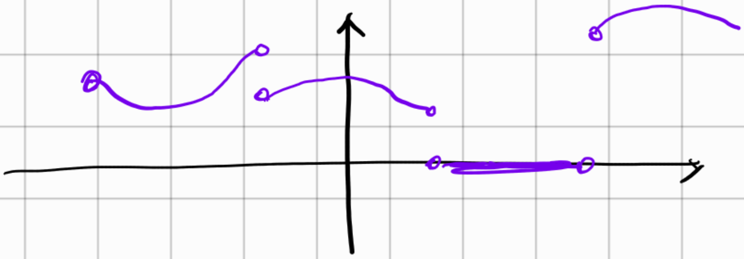
$\exists c \in \mathbb{R}$ $\quad u \cdot e^{\sin x} = c \quad$ (su ogni intervallo)

$u(x) = c \cdot e^{-\sin x}$



⚠ D'ora in poi considereremo solamente soluzioni definite su un intervallo. Inoltre quest intervalli devono essere "massimali"

altrimenti



Problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) + \cos x \cdot u(x) = 0 \\ u(2) = 1 \end{cases}$$

← eq. differenziale (in forma normale)

← dato iniziale

$u(x) = c \cdot e^{\sin x}$

impongo la condizione "iniziale" $\quad 1 \overset{!}{=} u(2) = c\, e^{-\sin 2}$

$c = e^{\sin 2}$

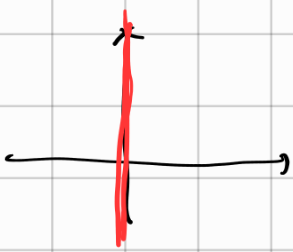
$$u(x) = e^{\sin 2} e^{-\sin x} = e^{\sin 2 - \sin x}$$

c'è una unica soluzione.

Esempio

$$\boxed{u' = \frac{u}{x} + x^2}$$

$x \neq 0$



$$u' - \frac{u}{x} = x^2$$

$$a(x) = -\frac{1}{x} \qquad A(x) = -\int \frac{1}{x}\,dx = -\ln|x|$$

$$u' e^{-\ln|x|} - u\cdot\frac{1}{x} e^{-\ln|x|} = x^2 e^{-\ln|x|}$$

$$\left(u\, e^{-\ln|x|}\right)' = x^2 e^{-\ln|x|}$$

$$e^{-\ln|x|} = \frac{1}{|x|}$$

Sto moltiplicando per $\frac{1}{x}$ se $x>0$

e per $-\frac{1}{x}$ se $x<0$

ma per comodità passo moltiplicando per $\frac{1}{x}$ anche se $x<0$.

$$\frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} = x$$

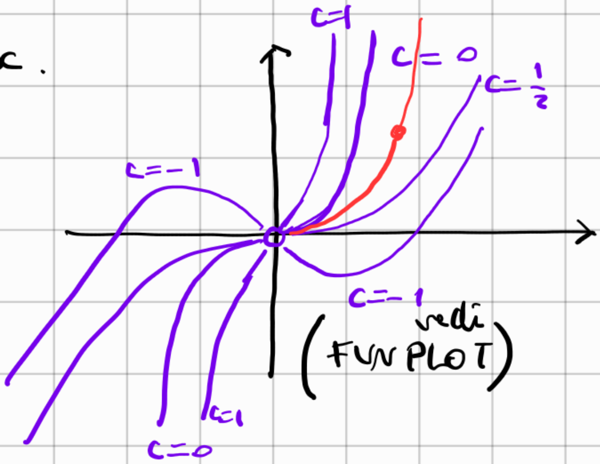
$$\left(u\cdot\frac{1}{x}\right)' = x$$

$$\frac{u(x)}{x} \in \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

su ogni intervallo

$$u(x) = \frac{x^3}{2} + cx.$$

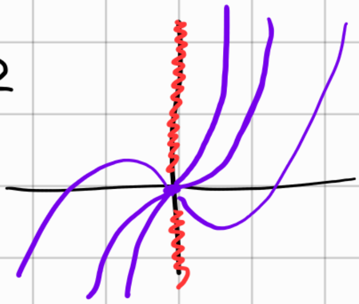
$$\left(\begin{matrix} \text{o } x>0 \\ \text{o } x<0 \end{matrix}\right)$$



<u>Nota</u> (moltiplico l'equazione per x)

$$x\cdot u' = u + x^3 \qquad x\in\mathbb{R}$$

viola sia l'esistenza
che l'unicità delle soluzioni
perché non è in forma normale



$$\begin{cases} xu' = u + x^3 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$ ho infinite soluzioni!

$$\begin{cases} xu' = u + x^3 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$ non ho alcuna soluzione!

Problema: determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione del pb. di Cauchy:

$$\begin{cases} u' = \frac{u}{x} + x^2 & (x \neq 0) \\ \boxed{u(1) = 1} \end{cases}$$

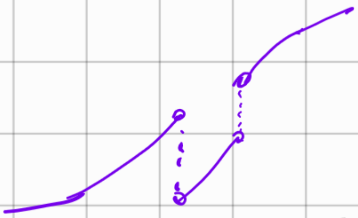
la soluzione è della forma $u(x) = \frac{x^3}{2} + cx$

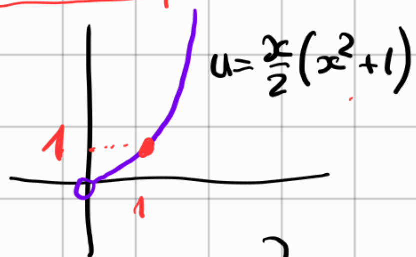
trovo c imponendo $u(1) = 1$

$$1 = \frac{1}{2} + c$$
$$c = \frac{1}{2}$$

la soluzione è $u(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}(x^2+1)$

l'intervallo massimale è $I = (0, +\infty)$ perché $x \neq 0$.





[tra tutti gli insiemi (non intervalli) ci possono essere molti domini massimali]

Esempio [autovalori della derivata]

$$D : C^1 \to C^0$$

$Du = \lambda u$ $\qquad$ $\lambda \in \mathbb{R}$ fissato $\qquad$ $D(\lambda u + \mu v) = \lambda Du + \mu Dv$

$$u' - \lambda u = 0 \qquad u' e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\lambda x} \cdot u = 0$$

$$\left(u \cdot e^{-\lambda x}\right)' = 0$$

$$u\, e^{-\lambda x} = c \qquad u = u(x) = c \cdot e^{\lambda x}$$

$$D\, e^{\lambda x} = \lambda\, e^{\lambda x}$$

Equazioni a variabili separabili del I ordine

In generale:

$$u'(x) = F(x, u(x))$$

$$F(x,y) = f(x) \cdot g(y)$$

$$u'(x) = f(x) \cdot g(u(x))$$

Si risolve "separando" le variabili.

$$u' = f(x) \cdot g(u)$$

$$\frac{u'}{g(u)} = f(x) \longrightarrow \int \frac{u'(x)}{g(u(x))}\, dx = \int f(x)\, dx$$

FORMALMENTE

$$\int \frac{u'\, dx}{g(u)} = \int f(x)\, dx$$

$$\left[\begin{array}{l} u = u(x) \\ du = u'(x)\, dx \end{array}\right]$$

$$\left[\int \frac{1}{g(u)}\, du\right]_{u=u(x)} = \int f(x)\, dx$$

$$\int \frac{du}{g(u)} = \int f(x)\, dx$$

$$G(u) = \int \frac{1}{g} \qquad F(x) = \int f$$

$$\left[G(u)\right]_{u=u(x)} = F(x) + c \qquad \text{(su ogni intervallo)}$$

$$G(u(x)) = F(x) + c$$

$\to$ dove G è invertibile:

$$u(x) = G^{-1}(F(x) + c).$$

Esempio

$$u' = x^2 \cdot e^u.$$

$$u' e^{-u} = x^2$$

$$\frac{du}{dx} e^{-u} = x^2$$

$$\int e^{-u}\, du = \int x^2\, dx$$

$$-e^{-u} = \frac{x^3}{3} + c$$

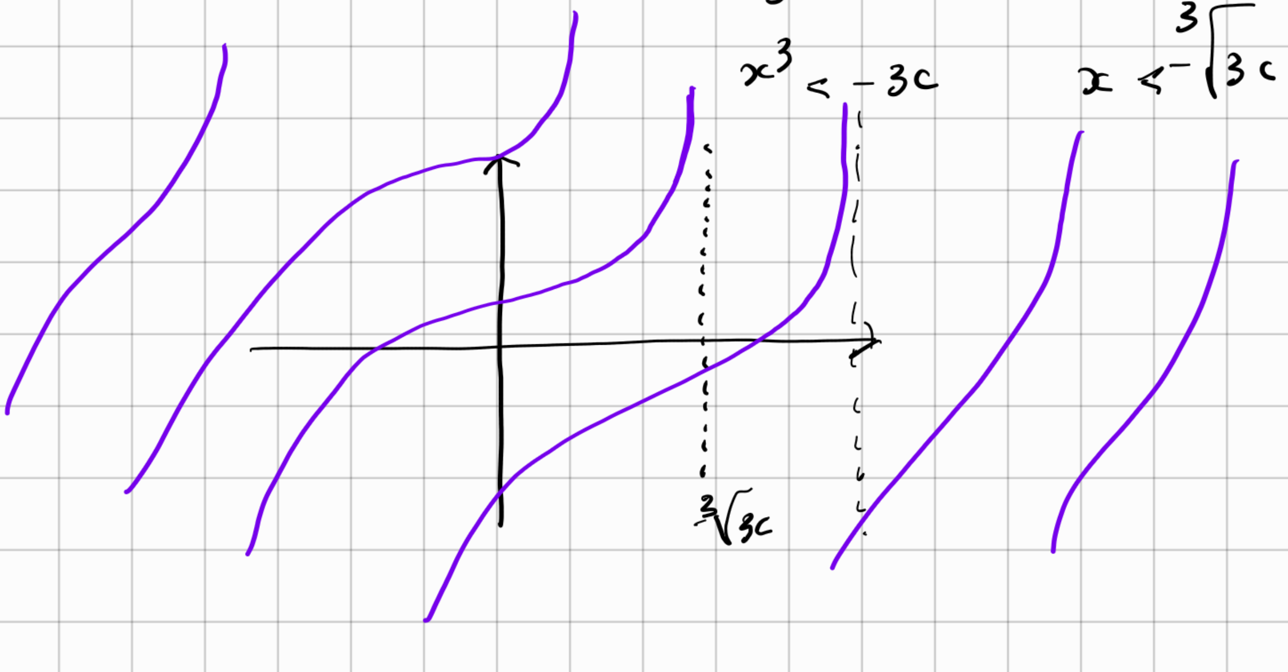
$$e^{-u} = -\frac{x^3}{3} - c$$

$$-u = \ln\left(-\frac{x^3}{3} - c\right)$$

$$u(x) = -\ln\left(-\frac{x^3}{3} - c\right)$$

è definita per $-\frac{x^3}{3} - c > 0$

$x^3 < -3c$ $\qquad$ $x < -\sqrt[3]{3c}$



Esempio [già visto]

(I ordine)
Le eq. autonome sono a variabili separabili

$$u' = \lambda u$$

$$\frac{u'}{u} = \lambda$$ ⚠ dove $u(x) \neq 0$ [Noto subito che $u(x)=0$ è soluzione

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \lambda \qquad \int \frac{1}{u}\,du = \int \lambda\,dx$$

$$\ln|u(x)| = \lambda x + c$$

$$|u(x)| = e^{\lambda x + c} = \underbrace{e^{c}}_{\text{è positivo}} \cdot e^{\lambda x}$$

$$u(x) = \pm e^{c} \cdot e^{\lambda x} \qquad \pm e^{c} = k \neq 0$$

⚠ se u è diversa da zero in un punto, rimane diversa da zero

aggiungendo anche $u(x)=0$ ho ritrovato tutte le soluzioni.

Esempio

$$u' = \frac{1}{u} \qquad u(x) \neq 0$$

$$u u' = 1$$

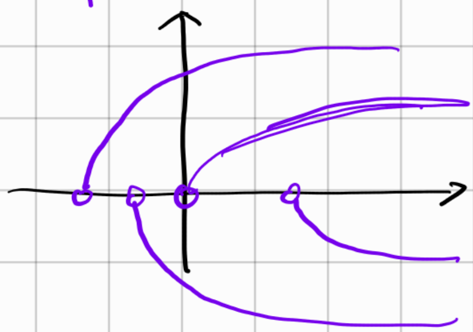
$$u \frac{du}{dx} = 1$$

$$\int u\,du = \int dx$$

$$\frac{u^2}{2} = x + c \qquad |u(x)| = \sqrt{2x+2c}$$

$x + c > 0$

$$u(x) = \pm\sqrt{2x+2c} \qquad x > -c$$



Esercizio

$$u'(x) = g\big(u(x)\big) \qquad \text{eq. } \underline{\text{autonoma.}}$$

se $u(x)$ è soluzione anche $v(x) = u(x+k)$ è soluzione.