28/02/2025

LEZIONE 56

✓ tratteremo ✗ non tratteremo

Equazioni differenziali

Classificazione

equazioni: $f(x)=b$ (algebriche)

equazioni funzionali: l'incognita è una funzione
↳ terminologia: $u = u(x)$ ma si usano anche $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(x) \\ y = y(t) \end{cases}$

↳ possono coinvolgere operazioni di tipo algebrico

$u: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$n, m \Rightarrow$ più variabili in partenza e arrivo

Esempio $u^2+u=7$ ⇝ si intende $(u(x))^2+(u(x))=7$ che si risolve allo stesso modo

⟶ posso svolgere operazioni diverse rispetto a quelle che svolgo sui numeri

- eq. integrale ⇐ $\int_a^b u(x)=1$ ⇝ quali sono le funzioni che hanno integrale $=1$
- eq. differenziale ⇐ $u''(x)=u(x)$

l'operazione inversa è l'integrale, che si usa per trovare le soluzioni

Le equazioni differenziali sono equazioni algebriche che coinvolgono $u(x)$ e le derivate $u'(x), u''(x), \dots$; tipicamente $u(x)$ e le sue derivate vengono trattate nello stesso punto.

Esempio (contrario) $u'(x)=u(x-1)$ ⇝ eq. con ritardo (coinvolgendo dati assunti precedentemente)

$u(x)$
↓
funzione di una sola variabile

ORDINARIE (EDO/ODE) ✓
posso fare le derivate successive (unico operatore derivata che posso applicare più volte)
$u'(x), u''(x), \dots$

$u(x,y,z)$
↓
funzione di più variabili

ALLE DERIVATE PARZIALI (PDE) ✗
posso fare le derivate rispetto alle singole variabili

$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2}, \frac{\partial^2 y}{(\partial y)^2}, \dots \Rightarrow$ aumenta il numero di derivate

$$\Delta u = f \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial y)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial z)^2}$$

laplaciano
divergenza
rotore
gradiente

} operatori che coinvolgono le derivate parziali (Maxwell / eq. del calore)

N.B. in questo corso, restringere il problema a un intervallo ristretto può essere parte della soluzione

$u: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\qquad m > 1 \Rightarrow$ EDP
$\qquad m = 1 \Rightarrow$ EDO

$m = 1$ $\qquad n > 1 \Rightarrow$ caso vettoriale
$\qquad n = 1 \Rightarrow$ caso scalare } variabili in arrivo

Un'altra suddivisione riguarda le equazioni lineari, e le equazioni non lineari

equazioni lineari: algebra lineare

la linearità si guarda nell'incognita ($u(x)$, non x) ⊛

u, v sono soluz. $\Rightarrow$ $\lambda u + \mu v$ è sol.

esempio

$u'' = u'$

→ operatore lineare
→ la derivata è lin.

equazioni non lineari: esempio

$u' = u^2$

$\Delta u + u^2 = 0$

Normalmente, più si complica un fenomeno, e più si perde linearità

Nelle eq. lin. i metodi risolutivi sono simili a quelli usati algebricamente, ma gli spazi di funzioni hanno dimensione infinita

Altro parametro di classificazione è l'ordine ($\sim$ grado delle eq. alg.), che è def. come il massimo ordine delle derivate che compaiono

I ordine: $\quad F(u(x), u'(x), x) = 0 \qquad$ es. $\; u'(x) = u^2(x) + \sqrt{x}$
$$F(y, z, x) = z - y^2 - \sqrt{x}$$

II ordine: $\quad F(u(x), u'(x), u''(x), x) = 0 \qquad$ es. $\; u''(x) \overset{*}{=} u(x) \quad (u'' = u)$
$$F(y, z, w, x) = w - y$$

* due funzioni sono uguali se lo sono $\forall x$ $\Longrightarrow$ F non dipende da x $\rightsquigarrow$ l'eq. si dice AUTONOMA

Risulta importante poter mettere l'equazione in forma normale:

⇓ esplicito la derivata più alta in funzione delle altre derivate

I ordine: $\quad u'(x) = f(x, u(x))$

II ordine: $\quad u''(x) = f(x, u(x), u'(x))$

ordine n: $u^{(n)}(x) = f(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$

La forma normale mi consente, sperabilmente, di trovare un'unica soluz.

Forma non normale: posso ricondurmi alla forma normale, ma possono esserci dei passaggi delicati

$$(u'(x))^2 = \sin x \rightsquigarrow u'(x) = \sqrt{\sin x}$$

(*) $x^2 u'(x) + u(x) = 0$ è lineare MA se provo a scriverla in forma normale devo dividere per x^2 che può portare problemi in $x=0$

forma normale

$$u'(x) = -\frac{1}{x^2} u(x) \qquad \text{se } x \neq 0$$

N.B.: le eq. lin/non lin. possono essere entrambe in forma normale o no

Le eq. diff., ancora, si possono classificare in autonome o non autonome

autonome: $F(u(x), u'(x), \cancel{x})$ non dipende da x

si risolvono più facilmente ⇓ modello che rimane invariato nel tempo (come se la derivata vi dipende)

non autonome: $F(u, u'(x), x)$

esempio pendolo forzato

Ancora, si può parlare di eq. omogenee o non omogenee (ha senso chiederselo solo per le lineari)

omogenee: $Ax = 0$ (sottospazio vettoriale)

non omogenee: $Ax = \underline{b}$ (sottospazio affine // alle sol. dell'omogenea associata)

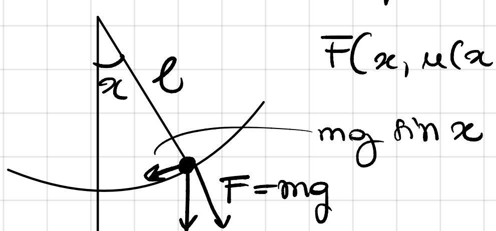
Esempio (equazione del pendolo)

$$\begin{cases} F = ma \rightsquigarrow \text{eq. diff.} \quad a = u''(x) \\ x = \text{tempo} \\ u(x) = \text{posizione di una particella} \end{cases}$$

$F = F(x, u, v)$ — u: posizione, v: velocità

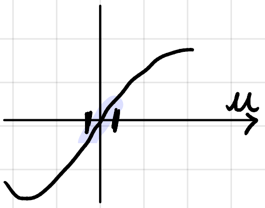
$F(x, u(x), u'(x)) = m(x)\, u''(x)$ — sistema a massa variabile

$$u''(x) = -\frac{g}{\ell} \sin(u(x))$$



Si tratta di una eq. diff. autonoma, in forma normale, non lineare, ordinaria, scalare

⇝ non si risolve esplicitamente (non lineare), ma:
- le costanti si tolgono ⟹ $u'' = -\sin u$
- si può scrivere la soluzione come integrali ellittici (primitiva non elementare)



⟹ sviluppo di Taylor per piccole oscillazioni, cioè si fa una LINEARIZZAZIONE ($\sin u \sim u$)

da cui $u'' = -\frac{g}{\ell} u$, che diventa lineare (e si risolve)

Problema di Cauchy

$u''(x) = -\frac{g}{\ell} \sin(u(x))$

quante soluzioni mi aspetto di avere?
In generale sono infinite

⟹ Aggiungo delle condizioni, che per le EDO si chiamano condizioni di Cauchy (dati iniziali)

Per il pendolo, affinché io abbia una soluzione, devo avere un angolo per determinare la traiettoria, e la velocità iniziale

$u(x_0) = y_0$ ⟶ valore (iniziale) della funzione

$u'(x_0) = z_0$ $= 0$ o $\neq 0$ se lo lascio cadere o gli do una spinta

⟹ il problema ha un'unica soluzione ⇝ DETERMINISMO

⟶ TEOREMA DI CAUCHY-LIPSCHITZ

$$\begin{cases} u''(x) = -\frac{g}{\ell}\sin(u(x)) \\ u(x_0) = y_0 \\ u'(x_0) = z_0 \end{cases}$$

} 2 condizioni ⟸ 2 ordine
(al I ordine mi basterebbe 1 condizione)

Metodi risolutivi

1) $\boxed{u'(x) = f(x)}$

EDO, I ord., forma normale, non autonoma ($f(x)$ data), lineare ⇝ non c'è dipendenza da u

Imposto il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$$

→ u è una primitiva di f ⇝ $u \underset{(=)}{\in} \int f$

⟹ dato iniziale: la soluzione si può scrivere univocamente

$$\boxed{u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}$$

Se f è continua (ipotesi di regolarità) su un intervallo posso fare l'integrale:

$$\begin{cases} F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \longrightarrow F'(x) = f(x) \quad \text{Teo Torricelli – Barrow} \\ (F+c)' = F' = f \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Lo spazio delle soluzioni dell'eq. ha dim. 2 (2 condizioni)

ALESSIA DI NINO