24/02/2025

LEZIONE 54

Formula di Stirling

$$\boxed{\text{per } n \to \infty \quad n! \sim \sqrt{2\pi}\cdot \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n}}$$

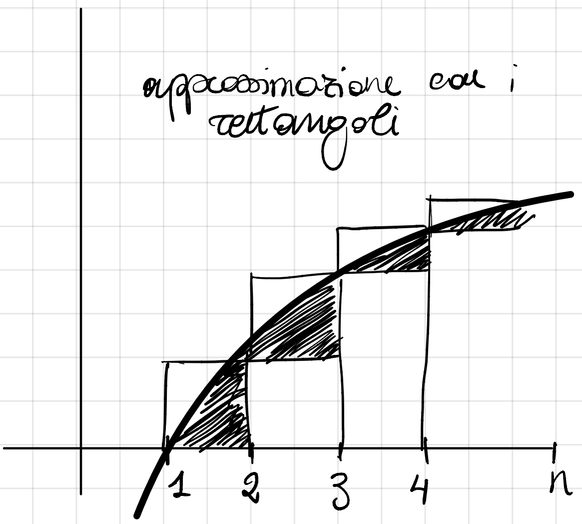
Dim.

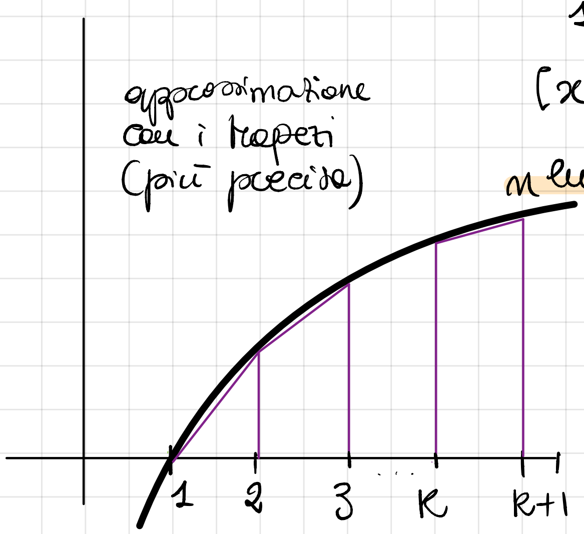
I passo: dimostrare che il limite $\lim_{n\to\infty} \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$ è finito

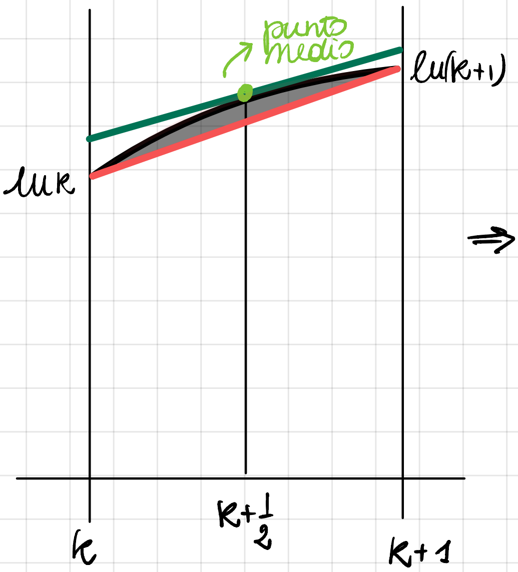
$$\ln \frac{n!\, e^n}{n^n\sqrt{n}} = \ln n! + n - n\ln n - \frac{1}{2}\ln n$$

$$\ln n! = \ln \prod_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} \ln k, \text{ che assomiglia a } \int_1^n \ln x \, dx$$

$$\int_1^n \ln x\, dx = [x\ln x - x]_1^n = n\ln n - n + 1$$







ln: funzione concava (derivata seconda <0) e ha la bella proprietà di stare sopra la secante e sotto la tangente (in generale non sono //)

$$\Rightarrow \frac{\ln k + \ln(k+1)}{2} \leq \int_k^{k+1} \ln x \;\overset{③}{\leq}\; \ln\left(k+\frac{1}{2}\right)$$

stimare l'errore

IDEA: area del trapezio ~ area del rettangolo sfruttando la proprietà di linearità:

$$\boxed{L \text{ lineare} \Rightarrow L\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{L(a)+L(b)}{2}}$$

$$\underset{①}{n\ln n - n + 1} = \int_1^n \ln x\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\ln x\,dx \geq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\ln k+\ln(k+1)}{2} = \frac12\sum_{k=1}^{n-1}\ln k + \frac12\sum_{k=2}^{n}\ln k =$$

qui manca il primo termine ma $\ln(1)=0$

qui manca un termine e lo devo sottrarre

$$= \sum_{k=1}^{n}\ln k - \frac12\ln n = \underset{②}{\ln n! - \ln\sqrt{n}}$$

perdendo una volta il ln

$$0 \leq \underset{① \; - \; ②}{n\ln n - n + 1 - \ln n! + \ln\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^{n-1} \quad ③ \leq$$

dobbiamo dire che non è ∞ (somma della misura degli errori, cioè differenza delle aree tra la curva e il trapezio che sta sotto)

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[\ln\left(k+\frac12\right) - \frac{\ln k+\ln(k+1)}{2}\right]$$

$$= \frac12\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{(k+\frac12)^2}{k(k+1)} =$$

$$= \frac12\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{k^2+k+1}{k^2+k} =$$

gli argomenti stanno tendendo a 1

$$= \frac12\sum_{k=1}^{n-1}\ln\Big(1+\overset{\varepsilon}{\frac{1}{4(k^2+k)}}\Big)$$ con $\ln(1+x)\sim x$ per $x\to 0$

$$\Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{4(k^2+k)}\right) \sim \frac{1}{4k^2} < +\infty$$

A questo punto, resta da trovare che il valore di quel numero sia proprio $\sqrt{2\pi}$ (che è il lim della somma delle aree tra curva e corda)

N.B.: serie limitata a termini positivi converge

Prodotto di Wallis (serve al calcolo della costante per Stirling)

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k\cdot 2k}{(2k+1)(2k-1)}} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdots$$

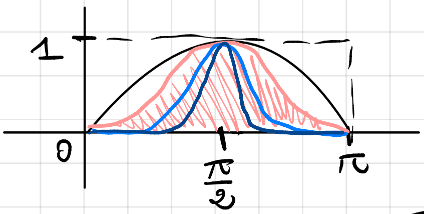
dim

$$I_n = \int_0^\pi \sin^n x\,dx$$ ⟶ svolgendo questo calcolo, ci si imbatte nel prodotto di Wallis

$I_0 = \pi$, $I_1 = 2$, $I_2 = \frac{\pi}{2}$ ⟶ in generale, si integra per parti

(legato al $\cos^2 x$)

il quadrato abbassa il grafico del seno



$n=2$
$n=3$
$n=4$
...

$$I_n = \int_0^\pi \sin^n x\,dx = \int_0^\pi \sin^{n-1}x\,\sin x\,dx = \cancel{\left[\sin^{n-1}x\,(-\cos x)\right]_0^\pi} + \int_0^\pi (n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi} \sin^{n-2}x\,(1-\sin^2 x)\,dx$$

$$\Longrightarrow I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$(1+n-1)I_n = (n-1)I_{n-2} \quad \text{da cui} \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

formula ricorsiva di ordine 2 (I_n si ottiene dal termine 2 volte precedente)

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2} I_0 = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}\cdot\pi$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3} I_1 = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}\cdot 2$$

Basta mostrare che $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \longrightarrow 1$

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{n-1}{n}$$

I_n decrescente, $\sin^n x \geq \sin^{n-1}x \geq 0 \Longrightarrow I_n \geq I_{n+1}$

$$I_n \leq I_{n-1} \leq I_{n-2}$$

$$1 \longleftarrow \frac{I_n}{I_{n-2}} \leq \frac{I_{n-1}}{I_{n-2}} \leq 1$$

(teorema dei carabinieri)

$\square$

Corollario (binomiale centrale)

I termini centrali del triangolo di Tartaglia tendono al massimo di una gaussiana

$$\boxed{\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}}$$

dim

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{da cui} \quad \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$\frac{\left(\prod_{k=1}^{n} 2k\right)^2}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n-1)(2n+1)} = \frac{((2n)!!)^2}{\underbrace{(2n-1)!!}(2n+1)} = \frac{(2^n n!)^2}{\left(\frac{(2n)!}{2^n n!}\right)^2(2n+1)} = \frac{(4^n)^2}{2n+1}\cdot\frac{(n!)^4}{((2n)!)^2} =$$

$$\boxed{(2n-1)!! = \frac{(2n)!!}{(2n)!!}\,(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}}$$

(i semifattoriali dispari si ricavano coi pari)

$$= \left(\frac{4^n}{\binom{2n}{n}\sqrt{2n+1}}\right)^2 \quad \text{con} \quad \frac{4^n}{\binom{2n}{n}\sqrt{2n+1}} \longrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Longrightarrow \binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{2n+1}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\sim \frac{4^n}{\sqrt{n}\sqrt{\pi}}$$

$\square$

Torniamo alla formula di Stirling: sappiamo $n! = K \cdot \dfrac{n^n \sqrt{n}}{e^n}$

vogliamo trovare K

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\cancel{K}}{K^{\cancel{2}}} \frac{(2\cancel{n})^{2n} \sqrt{2n}\, \cancel{e^{2n}}}{\cancel{e^{2n}} \cdot n^{2n} \cdot n} = \frac{4^n \sqrt{2}}{K\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{K} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow K = \sqrt{2\pi}$$

$\square$