Analisi Matematica A e B
Soluzioni prova parziale n. 2

Laurea in Fisica, a.a. 2024/25
Università di Pisa

22 febbraio 2025

Esercizio 1. Si consideri la funzione f definita per $x > -1$ da

$$f(x) = x^3 - (\sin(x^2)) \cdot \ln(1+x).$$

(a) Determinare il polinomio di Taylor di f di ordine 4 centrato in $x_0 = 0$.

(b) Determinare il valore minimo di f.

Soluzione. Per la parte (a) ricordiamo gli sviluppi di Taylor per $x \to 0$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad \sin x = x + o(x^2)$$

da cui

$$\sin x^2 = x^2 + o(x^4)$$

e quindi

$$f(x) = x^3 - (x^2 + o(x^4)) \cdot (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = x^3 - x^3 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) = \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

Visto che il polinomio di Taylor di ordine 4 di f centrato in 0 è l'unico polinomio di ordine non superiore a 4 che soddisfa la formula di Taylor, per $x \to 0$:

$$f(x) = P(x) + o(x^4)$$

deduciamo che $P(x) = \frac{x^4}{2}$.

In particolare possiamo affermare che $x = 0$ è un punto di minimo relativo per f. Per rispondere alla domanda (b) possiamo quindi sospettare che sia proprio $x = 0$ il punto di minimo e quindi che sia $f(0) = 0$ il valore minimo di f. Per dimostrare che $f(0)$ è il valore minimo (assoluto) di f dovremo quindi dimostrare che per ogni $x > -1$ si ha $f(x) \geq 0$.

Se $x > 0$ risulta $\sin x \leq x$ e $\ln(1+x) \leq x$. Queste due disuguaglianze si intuiscono disegnando il grafico delle due funzioni $\sin x$ e $\ln(1+x)$ e la loro retta tangente nel punto $x = 0$. Per dimostrarlo rigorosamente possiamo fare un veloce studio di funzione. La funzione $x - \sin x$ ha derivata $1 - \cos x \geq 0$ e quindi è crescente. Dunque se $x \geq 0$ si ha $x - \sin x \geq 0 - \sin 0 = 0$ da cui $\sin x \leq x$. Analogamente la funzione $x - \ln(1+x)$ ha derivata $1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$ per $x \geq 0$. Dunque anche questa funzione è crescente per $x \geq 0$ e dunque $x - \ln(1+x) \geq 0 - \ln 1 = 0$ da cui $\ln(1+x) \leq x$.

Dunque, se $x \geq 0$, si ha

$$f(x) = x^3 - (\sin(x^2)) \cdot \ln(1+x) \geq x^3 - x^2 \cdot x = 0.$$

Risulta molto più complicato dimostrare che la stessa disuguaglianza vale per $x \leq 0$. Un modo per farlo è quello di confrontare le funzioni $\sin(x^2)$ e $\ln(1+x)$ per $x < 0$ usando anche il termine successivo dello sviluppo di Taylor. Nel seguito proponiamo di utilizzare la formula di Taylor con resto di Lagrange, perché questo velocizza la dimostrazione. Ma si potrebbe anche fare uno studio delle funzioni $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ e $\sin y - y + \frac{y^3}{6}$: dal segno della derivata seconda si ricava il segno della derivata prima e quindi il segno della funzione.

Per la funzione $\sin y$ si può dimostrare facilmente che $\sin y \geq y - \frac{y^3}{6}$ se $y \in [0,1]$. La formula di Taylor col resto di Lagrange ci dice che vale

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + \cos\xi \cdot \frac{y^5}{5!} \geq y - \frac{y^3}{6}$$

in quanto il coseno è positivo su $[0,1]$ e $\xi \in [0,y]$. Di conseguenza si ha

$$\sin x^2 \geq x^2 - \frac{x^6}{6}, \qquad \forall x \in [-1,1]. \tag{1}$$

Per la funzione $\ln(1+x)$ possiamo cercare di fare una stima simile per $-1 < x < 0$. Usando anche qui il resto di Lagrange. Puntiamo a dimostrare che $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2}$. La derivata terza di $\ln(1+x)$ è $\frac{2}{(1+x)^3}$ dunque, per la formula di Taylor col resto di Lagrange:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{(1+\xi)^3} \cdot \frac{x^3}{6} \leq x - \frac{x^2}{2} \qquad \text{per } -1 < x < 0. \tag{2}$$

in quanto $\xi \in (x,0)$ e quindi $1 + \xi > 0$.

Dunque, per $x \in (-1,0]$, usando (1) e (2) si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + \sin x^2(-\ln(1+x)) \\ &\geq x^3 + (x^2 - \frac{x^6}{6})\left(-x + \frac{x^2}{2}\right) \\ &= x^3 - x^3 + \frac{x^7}{6} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{12} \\ &= \frac{x^4}{12}\left(6 + 2x^3 - x^4\right) \geq \frac{x^4}{12}(6 - 2 - 1) = \frac{x^4}{4} \geq 0. \end{aligned}$$

□

Esercizio 2.

(a) Calcolare $\displaystyle\int_{-2}^{4} \frac{1}{\sqrt{8+2t-t^2}}\, dt.$

(b) Determinare i valori del parametro reale x per i quali è convergente l'integrale

$$F(x) = \int_{-2}^{4} \frac{1}{\left(\sqrt{8+2t-t^2}\right)^x}\, dt.$$

(c) Dimostrare che la funzione $F(x)$ è continua nel punto $x = 1$.

Soluzione. Per la prima domanda, facciamo i cambi di variabile $t - 1 = s$ e $s = 3\tau$, da cui l'integrale cercato diventa

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{3} \frac{1}{\sqrt{9-s^2}} ds &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau \\ &= 2\arcsin(1) = \pi.\end{aligned}$$

Per la seconda domanda, con lo stesso cambio di variabile possiamo scrivere:

$$F(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1-\tau^2)^{x/2}}\, d\tau.$$

Osserviamo che per $\tau \to 1^-$ si ha $1-\tau^2 = (1-\tau)(1+\tau) \sim 2(1-\tau)$ e analogamente per $\tau \to 1^+$ si ha $1-\tau^2 \sim 2(1+\tau)$. Dunque, grazie al criterio di confronto asintotico, possiamo concludere che l'integrale converge se e solo se $\frac{x}{2} < 1$ ovvero $x < 2$.

Per il punto (c) è sufficiente mostrare che è possibile scambiare il limite con l'integrale in quanto in tal caso si avrebbe:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} F(x) = \lim_{x\to 1} \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1-\tau^2)^{\frac{x}{2}}}\, d\tau &\overset{?}{=} \int_{-1}^{1} \lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-\tau^2)^{\frac{x}{2}}}\, d\tau \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\, d\tau = F(1).\end{aligned}$$

Osserviamo che la funzione integranda è continua nella coppia (τ, x). Affinché si possa scambiare il limite con l'integrale per il teorema di convergenza dominata è quindi sufficiente trovare una funzione $g(\tau)$ con integrale finito, tale che per ogni $\tau \in (-1, 1)$ si abbia

$$\frac{1}{(1-\tau^2)^{x/2}} \leq g(\tau).$$

Possiamo restringere x all'intervallo $x < \frac{3}{2}$ e, per monotonia rispetto a x (ricordiamo che $1 - \tau^2 < 1$ per $\tau \in (-1, 1)$) osservare che si ha

$$\frac{1}{(1-\tau^2)^{x/2}} \leq \frac{1}{(1-\tau^2)^{3/4}} = g(\tau) \qquad \forall x < \frac{3}{2}.$$

L'integrale di g non è altro che $F(3/2)$ che sappiamo essere finito per quanto già visto al punto (b). Dunque lo scambio del limite con l'integrale è giustificato. □

Esercizio 3. Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

(a) Provare che la funzione f è derivabile per ogni $x \neq 0$.

(b) Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(c) Mostrare che f può essere estesa per continuità nel punto $x = 0$. L'estensione è derivabile in $x = 0$?

Soluzione. Poiché $\frac{\sin t}{t} \to 1$ per $t \to 0$, la funzione integranda è prolungabile con continuità in $t = 0$ dunque la funzione f è ben definita come integrale di Riemann per ogni $x \neq 0$.

Essendo poi $\frac{\sin t}{t}$ pari si ha $f(x) = \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$. Pertanto, dal teorema fondamentale del calcolo f è prodotto di funzioni derivabili in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, quindi è derivabile, come richiesto nel punto (a).

Per il punto (b), ricordiamo che $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ è il classico esempio di integrale convergente ma non assolutamente convergente (sappiamo anche che tale integrale vale $\frac{\pi}{2}$). Visto che $\frac{2}{x} \to 0$, per $x \to +\infty$, si ha che $f(x) \to 0$.

In alternativa si può osservare che

$$|f(x)| \leq \frac{2}{x}\left(1 + \int_1^x \frac{1}{t}\, dt\right) = \frac{2}{x}(1 + \log x) \to 0, \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Per il punto (c) dallo sviluppo di Taylor di $\sin t$ si ha

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^x \frac{t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)}{t}\, dt = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right) dt$$

per le proprietà degli integrali di infinitesimi quindi

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt = x - \frac{x^3}{18} + o(x^3),$$

da cui

$$f(x) = 2 - \frac{x^2}{9} + o(x^2) = 2 + o(x).$$

Dunque f è prolungabile con continuità in 0 con valore 2, e tale prolungamento, per la definizione di derivata, è derivabile in 0 con derivata 0.

OSSERVAZIONE (teoria svolta per la sezione A, parzialmente per la sezione B per cui si annotano alcune spiegazioni per la teora mancante) in realtà sia $\frac{\sin t}{t}$ che f sono prolungabili in modo $C^\infty(\mathbb{R})$.

1. - Poichè, per lo sviluppo di Taylor di $\sin t$,

$$\frac{\sin t}{t} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} + (-1)^{n+1} \cos(\xi) \frac{t^{2n+2}}{(2n+3)!}:$$

- per il criterio della radice la serie converge assolutamente, anzi per ogni $a < b \in \mathbb{R}$ totalmente ed uniformemente su $[a;b]$ (criterio della coda):
$\sup_{t\in[a;b]} \left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \sup_{t\in[a;b]} \frac{|t|^{2k}}{(2k+1)!} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(|a|+|b|)^k}{k!} \longrightarrow 0;$
- analogamente il resto converge uniformemente a 0 su ogni $[a;b]$:
$\sup_{t\in[a;b]} \left| (-1)^{n+1} \cos(\xi) \frac{t^{2n+3}}{(2n+3)!} \right| \leq \frac{(|a|+|b|)^{2n+3}}{(2n+3)!} \longrightarrow 0,\ n \to \infty.$

Quindi non solo si ha $\frac{\sin t}{t} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!}$ per ogni t, ma anche che $\frac{\sin t}{t}$ è limite uniforme su ogni $[a;b]$ delle somme parziali. In particolare come noto è prolungabile con continuità in 0 con il valore 1.

-Inoltre poichè:
– la serie è ben definita per ogni t, compreso 0,
– le somme parziali calcolate in 0 valgon $1 \to 1$, $n \to \infty$,
– e poichè le serie delle derivate dei monomi sono dello stesso tipo, funzioni continue che in 0 hanno lo stesso valore, e, sempre per il criterio della radice, convergono uniformemente sui chiusi limitati
- - iterando la derivazione dei termini della serie:

si è nelle ipotesi del il criterio di scambio tra derivata e limite, per cui si ha che $\frac{\sin t}{t}$ è prolungabile in 0 in modo C^{∞}.
- Si osserva inoltre che la convergenza è dominata sugli intervalli chiusi e limitati
$\left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|t|^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{|t|^k}{k!} \leq e^{|t|}.$
Pertanto si può scambiare la serie con l'integrale su $[0;x]$ per cui, per $x \neq 0$
$f(x) = \frac{2}{x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \int_0^x t^{2k}\, dt = \frac{2}{x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)(2k+1)!} x^{2k+1} =$
$= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)(2k+1)!} x^{2k} = 2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)(2k+1)!} x^{2k}.$
Si ripete quindi per f quanto detto per $\frac{\sin t}{t}$:
- - la serie è ben definita anche per $x = 0$, converge uniformemente sugli intervalli chiusi e limitati, e le somme parizali di tale serie in $x = 0$ hanno lo stesso valore,
- - le serie delle successive derivate dei monomi hanno le stesse proprietà,
quindi iterativamente si usa il crieterio di scambio tra derivata e limite ottendeno che f è prolungabile in maniera C^{∞} ad $\mathbb{R}$, con il valore 2. Inoltre il valore in 0 della derivata prima del prolungamento è 0. Si ottengono gli sviluppi di Taylor di ogni ordine centrati nell'origine, *e.g.*:

$$f(x) = 2 - 2\frac{x^2}{3(3!)} + 2\frac{x^4}{5(5!)} + O(x^6).$$

□