ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 35 - 8.1.2025

Formula di Taylor.

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Teorema Se f è "abbastanza regolare"

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

FORMULA di TAYLOR

ovvero

$$\boxed{f(x) = P(x) + o\left((x-x_0)^n\right).}$$

dim fatta l'anno scorso.

Esempio $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$, $n = 2$

$$P(x) = \cos 0 - \sin 0 \cdot x - \frac{\cos 0}{2}\cdot x^2$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Formula di Taylor: $\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$ (*)

FORMULA DI TAYLOR

Esercizio $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^4} = ?$

(**) $\cos(x^2) = \boxed{1 - \frac{x^4}{2}} + o(x^4)$ ← E' LA FORMULA DI TAYLOR?

$$\frac{1-\cos(x^2)}{x^4} = \frac{\frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{2} + \overset{0}{\cancel{\frac{o(x^4)}{x^4}}} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

DOMANDA (10*) mi dico che: $1-\frac{x^4}{2}$ è il polinomio di Taylor di $\cos(x^2)$ (di ordine 4 centrato in $x_0=0$)

(nelle stesse ipotesi del Teorema precedente)

Teorema (viceversa) se vale la formula:

$$f(x)=Q(x)+\underline{o((x-x_0)^n)}$$

con Q polinomio di grado $\deg Q \le n$

Allora $Q=P$ è il polinomio di Taylor di f di ordine n centrato in x_0.

dim P sia il Polinomio di Taylor.

Allora (per il primo teorema):

$$f(x)=P(x)+o((x-x_0)^n)$$

per ipotesi $f(x)=Q(x)+o((x-x_0)^n)$

$$R(x)=P(x)-Q(x)=o((x-x_0)^n).$$

$\deg R \le n$

$$R(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$$

$$\frac{R(x)}{(x-x_0)^n}=\boxed{\frac{\overset{=0}{a_0}+a_1\cancelto{0}{(x-x_0)}+a_2\cancelto{0}{(x-x_0)^2}+\dots+a_n\cancelto{0}{(x-x_0)^n}}{(x-x_0)^n}}\to 0$$

per $x \to x_0$ $\qquad R(x) \to a_0 = R(x_0)$

$a_0 = 0$ $\qquad$ altrimenti $\left|\frac{R(x)}{(x-x_0)^n}\right| \to +\infty$

$$\frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{a_1\cancel{(x-x_0)} + a_2(x-x_0)^{\overset{1}{\cancel{2}}} + \dots + a_n(x-x_0)^{\overset{n-1}{\cancel{n}}}}{(x-x_0)^{\cancel{n}\,n-1}}$$

$$= \frac{a_1 + a_2(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^{n-1}}{(x-x_0)^{n-1}}$$

allora $\quad a_1 = 0 \quad$ e così via...

.... $a_n = 0$ $\qquad R = 0 \Rightarrow P = Q$ □

Esempio $\quad$ Abbiamo visto che

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

dunque $\quad 1 - \frac{x^4}{2}$ è il polinomio di Taylor di ordine 4 per $\cos(x^2)$ centrato in $x_0 = 0$.

Esercizio $\quad$ Sia $f(x) = \cos(x^2)$.

Calcolare $\quad f''''(0)$.

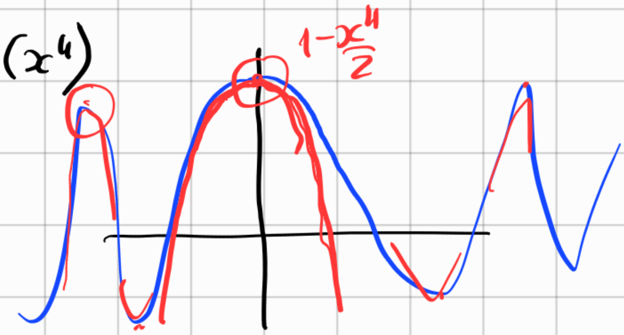
So che $\quad 1 - \frac{x^4}{2}$ è il P. di Taylor di f.

$$1 \boxed{-\frac{x^4}{2}} = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \boxed{\frac{f''''(0)}{24}x^4}$$

$$\Rightarrow \quad f(0)=1$$
$$f'(0)=0$$
$$f''(0)=0$$
$$f'''(0)=0$$
$$\frac{f''''(0)}{24} = -\frac{1}{2} \quad \| \qquad f''''(0) = -12.$$

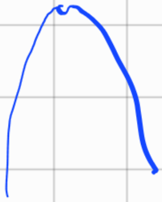
Osserviamo che la formula di Taylor ci dà utili informazioni locali su f in un intorno di x_0.

Es:
$$\underbrace{\cos(x^2)}_{} = \underbrace{1-\frac{x^4}{2}}_{\substack{\text{ha massimo}\\ \text{in } x=0}} + o(x^4)$$



Posso dedurre che $\cos(x^2)$ ha un massimo locale in $x=0$?

Sì perché:



$$\cos(x^2) - 1 = -\frac{x^4}{2} + \underbrace{o(x^4)}_{}$$
$$= \underbrace{-\frac{1}{2}x^4}_{\substack{<0\\ \forall x\neq 0}} \cdot \Big(\underbrace{1 + o(1)}_{\downarrow\, 1}\Big)$$

>0 in un intorno di 0 per la permanenza del segno.

< 0 in un intorno di 0.

$$\cos(x^2) < 1 = \cos(0^2) \qquad \text{in un intorno di } 0$$

⇒ $x=0$ è punto di massimo locale (stretto) □

In generale se:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$f'(x_0)=0 \;\dots\; f^{(n-1)}(x_0)=0$

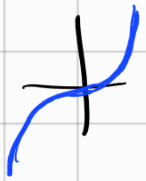
$f^{(n)}(x_0) \neq 0$

(x_0 è un punto critico)

$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^n \cdot \underbrace{\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1)\right)}_{\text{ha il segno di } f^{(n)}(x_0)}$$

allora:

se n dispari f non ha né massimo né minimo in x_0 (*)
(è un flesso)



se n pari
- $f^{(n)}(x_0) > 0$ x_0 è un punto di minimo locale.
- $f^{(n)}(x_0) < 0$ x_0 è un punto di massimo locale.

[(*) anzi di più: f è strettamente monotona in un intorno di x_0.]

per casa

Abbiamo utilizzato le derivate successive di f in un punto critico per determinare la "natura" del punto critico.

COEFFICIENTI BINOMIALI

$$(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$$

$(a\neq 0)$

coefficienti binomiali ↙

$$(1+x)^n = \text{polinomio di grado } n = \sum_{k=0}^{n} \boxed{C_{n,k}}\, x^k$$

ES $(1+x)^2 = (1+x)(1+x) = 1+x+x+x^2 = 1+2x+x^2$

$1 \quad 2 \quad 1$

Come trovo i coefficienti binomiali?

Notazione $C_{n,k} = \binom{n}{k}$ ("n su k")

Triangolo di Tartaglia (o Pascal):

$$\boxed{(1+x)^{n+1}} = (1+x)^n\cdot(1+x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\cdot(1+x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n-1}{k-1}x^k$$

$$= \underset{\uparrow}{\boxed{\binom{n}{0}}} + \sum_{k=1}^{n}\underset{\uparrow}{\underbrace{\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]}}\cdot x^k + \underset{\uparrow}{\binom{n}{n}}x^{n+1}$$

Esempio $n=2$

$$(1+2x+x^2)(1+x)$$
$$= (1+2x+x^2)+(x+2x^2+x^3)$$
$$= \boxed{1}+3x+3x^2+\boxed{x^3}$$

Quindi:

$$\circledast \quad \binom{n+1}{0} = \binom{n}{0} \qquad k=0$$

$$\circledast \quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \qquad (k>0)$$

$$\circledast \quad \binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n}$$

$$(1+x)^0 = 1$$

$$(1+x)^1 = 1+x$$

$\binom{n}{k}$	k=0	1	2	3		
n=0	1					
n=1	1	1				
n=2	1	2	1			
	1	3	3	1		
	1	4	6	4	1	
→	1	5	10	10	5	1
	⋮					…

$$\binom{2}{1} = \binom{1}{1} + \binom{1}{0}$$

In particolare:

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Es

$$(a+b)^5 = a^5\left(1+\frac{b}{a}\right)^5 = a^5\left(1+5\frac{b}{a}+10\frac{b^2}{a^2}+10\frac{b^3}{a^3}+5\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^5}{a^5}\right)$$

$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

1 5 10 10 5 1

METODO COMBINATORIO (formula esplicita)

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$\binom{n}{k} = \,?$$

$$(1+x)^n = \overbrace{(1+x)(1+x)\cdot(1+x)\dots\dots(1+x)}^{n \text{ fattori}}$$

$$= \dots\dots + \boxed{\binom{n}{k}} x^k + \dots$$

in quanti modi posso scegliere 1 o x in ogni fattore ed avere k volte x e $(n-k)$ volte 1.

ovvero:

Quanti sono i sottoinsiemi con k elementi di un insieme di n elementi.

$$\binom{n}{k} = \#\{A \in \mathcal{P}([n]) : \#A = k\}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots\ 1} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} =$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)$$

$\textcircled{\#}$

<u>Esercizio</u> dimostrare $\textcircled{\#}$ per induzione utilizzando la definizione ricorsiva.