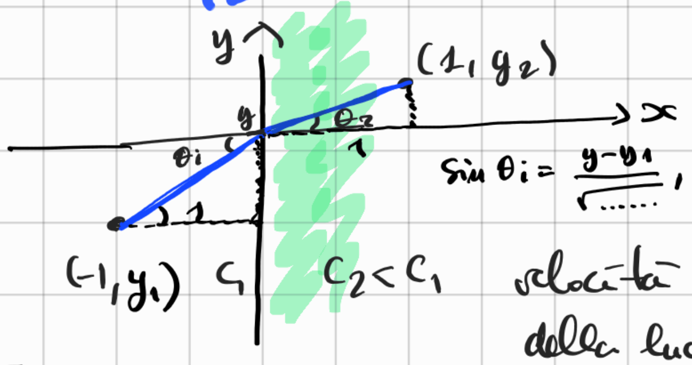
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 31 - 6.12.2024



Esercizio (Fermat)

$\sin\theta_i = \frac{y-y_1}{\sqrt{\dots}}$, $\sin\theta_2 = \frac{y_2-y}{\sqrt{\dots}}$

velocità della luce

tempo impiegato se passo da $(0,y)$

$$f(y) = \frac{1}{c_1}\sqrt{(y-y_1)^2+1} + \frac{1}{c_2}\sqrt{(y_2-y)^2+1}$$

Se f ha minimo in $y \Rightarrow f'(y) = 0$

$$f'(y) = \frac{1}{c_1}\frac{y-y_1}{\sqrt{(y-y_1)^2+1}} + \frac{1}{c_2}\frac{y-y_2}{\sqrt{(y-y_2)^2+1}} = 0$$

$$\frac{1}{c_1}\frac{y-y_1}{\sqrt{1+(y-y_1)^2}} = \frac{1}{c_2}\frac{y_2-y}{\sqrt{1+(y_2-y)^2}}$$

Weierstrass (*)

$\Downarrow$

f ha minimo

$$\frac{\sin\theta_i}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_2} = \frac{c_1}{c_2}$$ legge di Snell.

Def MASSIMO/MINIMO LOCALE (o RELATIVO)

vs GLOBALE (o ASSOLUTO)

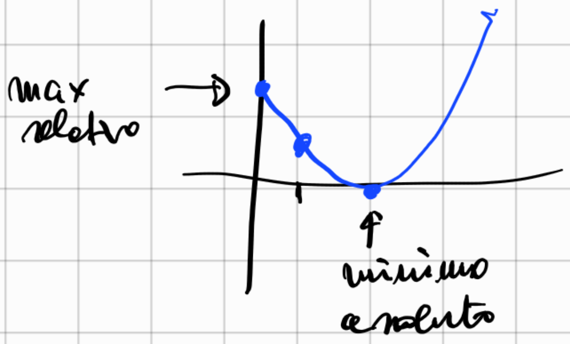
$f: A \to \mathbb{R}$ x_0 è punto di massimo (globale)

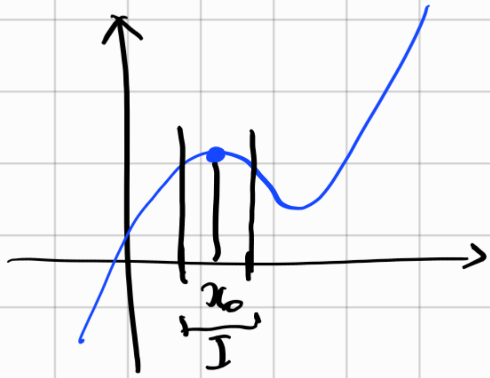
se $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in A$.

Diremo che $x_0 \in A$ è un massimo locale se esiste un intorno I di x_0 $\quad (I=(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon))$

tale che x_0 è punto di massimo di

f ristretta ad $A\cap I$.





Def diremo che x_0 è un punto **critico** di f se $f'(x_0)=0$.

(*) Weierstrass generalizzato

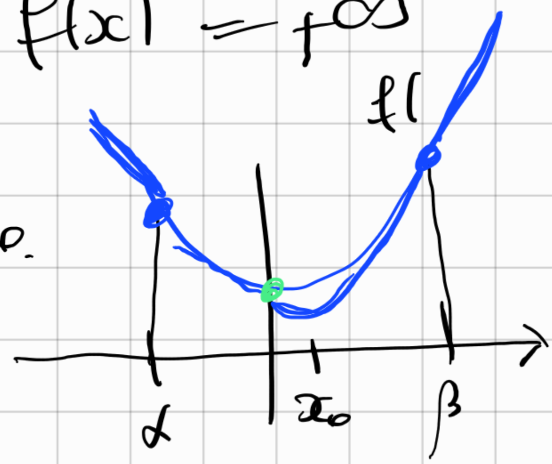
$-\infty\le a<b\le+\infty$

Oss Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ continua

tale che
$$\begin{cases}\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty\\ \lim_{x\to b^-} f(x)=+\infty\end{cases}$$

COERCIVA

allora f ha minimo.



dim

$$f(x) \geq f(0) \qquad \forall x < \alpha < 0$$

$$f(x) \geq f(0) \qquad \forall x > \beta > 0$$

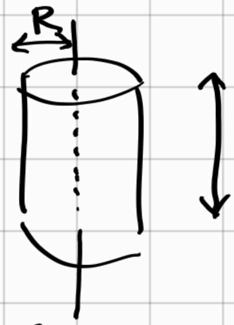
Per Weierstrass su $[\alpha,\beta]$ $\quad \exists\, x_0 \in [\alpha, \beta]$

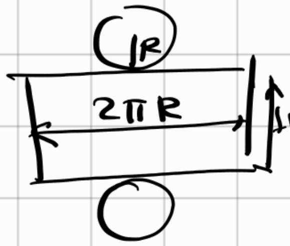
$$f(x_0) = \min f([\alpha,\beta]) \leq f(0)$$

$\Rightarrow x_0$ è un minimo assoluto su tutto $\mathbb{R}$. □

Esercizio (lattina)

Determinare R e H in modo che il cilindro di raggio R e altezza H abbia





$$① \begin{cases} \pi R^2 H = V_0 = 33\,cl = 330\,cc \\ \text{Superficie totale} \to \text{minima} \end{cases}$$

$$S_{tot} = 2\pi R H + 2\pi R^2$$

① $\quad H = \dfrac{V_0}{\pi R^2}$

$$S_{tot} = f(R) = 2\pi R \frac{V_0}{\pi R^2} + 2\pi R^2$$

$$= \boxed{2\frac{V_0}{R} + 2\pi R^2}, \qquad R > 0$$

per $R \to 0^+$ $\quad f(R) \to +\infty$

per $R \to +\infty$ $\quad f(R) \to +\infty$

f ha minimo per Weierstrass generalizzato.

f derivabile $\Rightarrow f'(R)=0$ nel minimo.

$$f'(R) = -\frac{2V_0}{R^2} + 4\pi R$$

$$f'(R)=0 \iff 4\pi R = \frac{2V_0}{R^2} \qquad R^3 = \frac{2V_0}{4\pi}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}} \approx 1,5 \text{ cm}$$

CRITERI DI MONOTONIA

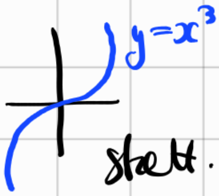
Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo
f continua, f derivabile in $J = (\inf I, \sup I)$

① $\forall x \in J$ $f'(x) \geq 0$ $(\leq)$ $\iff$ f è crescente (su I) (decrescente)

② $\forall x \in J$ $f'(x) > 0$ $(<)$ $\Rightarrow$ f è strett. crescente (decrescente)

① $\Rightarrow$ ③ $\forall x \in J$ $f'(x) = 0 \iff f$ è costante

Continuità di $\mathbb{R}$
$\Downarrow$
Weierstrass
$\Downarrow$
Fermat
$\Downarrow$
Rolle
$\Downarrow$
SI USA $\to$ Lagrange
$\Downarrow$
criteri di monotonia



$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$

---

dim ① $\Leftarrow$ è facile. Sia f crescente

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \begin{cases} h>0 & \frac{+}{+} \geq 0 \\ h<0 & \frac{-}{-} \geq 0 \end{cases} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x) \geq 0$$

⚠ se f è strett. crescente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$

$f'(x) \geq 0$

$1,2 \Rightarrow$ $f'(x) \geq 0$ ← Ipotesi
(>0)

Tesi → dati $a, b \in I$,

$a < b \overset{?}{\Rightarrow} f(a) \leq f(b)$
$(<)$

I è un intervallo

Lagrange su $[a,b] \subseteq I$
$\left(\begin{array}{l} f \text{ è continua su } [a,b] \subseteq I \\ f \text{ è derivabile su } (a,b) \subseteq J \end{array} \right)$

$\exists c \in (a,b)$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c) \geq 0 \quad (>0)$$

ma $b - a > 0$

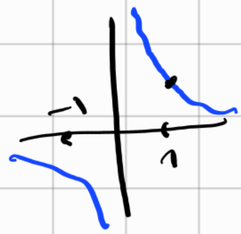
$$\Rightarrow f(b) - f(a) \geq 0 \quad (>0)$$

$\square$

⚠ $f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

NO! ~~dunque~~ f è strettamente decrescente

No $\quad f(-1) < f(1)$



dom $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è un intervallo.

⚠ $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

NO $\Rightarrow f$ costante

disegno $y = f(x)$

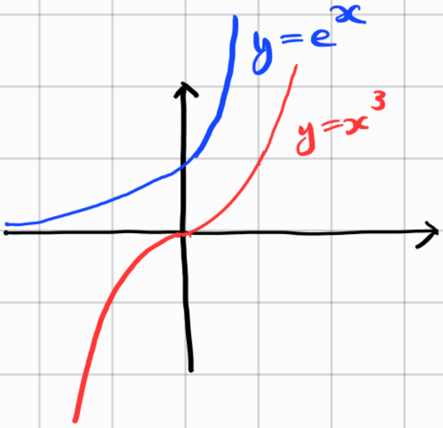
Ma è vero:

- $\frac{1}{x}$ è strett. decrescente su $(0,+\infty)$ e su $(-\infty,0)$

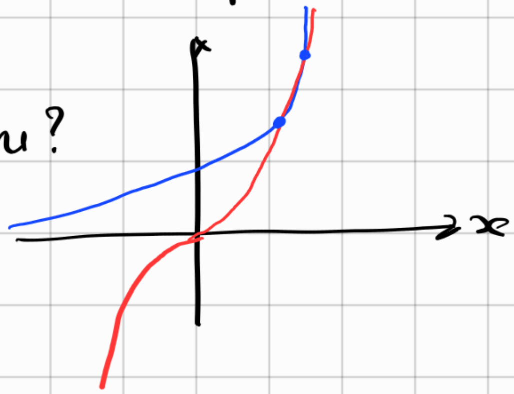
- $f(x)=\arctan x+\arctan\frac{1}{x}$ è costante su $(0,+\infty)$ e su $(-\infty,0)$

Esercizio (presentazione corso) Risolvere $e^x=x^3$.

[Significa dire quante soluzioni ha e come si possono approssimare]



oppure?



$e^x=x^3$ $\longrightarrow$ idea 1 studiare $f(x)=e^x-x^3$

positivo

$x>0$

.... MOLTO LUNGO e COMPLICATO...

$\Updownarrow$

$x=3\ln x$

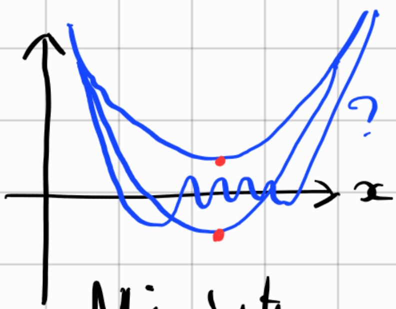
idea 2 studiare $f(x)=x-3\ln x$

dominio: $x>0$

limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$$



Mi interessa sapere se il minimo è positivo o negativo.

$f'(x) = 1 - \frac{3}{x}$ ← mi interessa il segno

$x>0$

$1 - \frac{3}{x} \overset{?}{>} 0 \iff 1 > \frac{3}{x} \iff x > 3$

$\phantom{1 - \frac{3}{x}}(<) (<) (<)$

$\phantom{1 - \frac{3}{x}}(=) (=) (=)$

TABELLA dei SEGNI

x	0^+	x_1	3	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$\nexists$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min assoluto	$\nearrow$	
$f(x)$	$+\infty$		$-$		$+\infty$

← monotonia

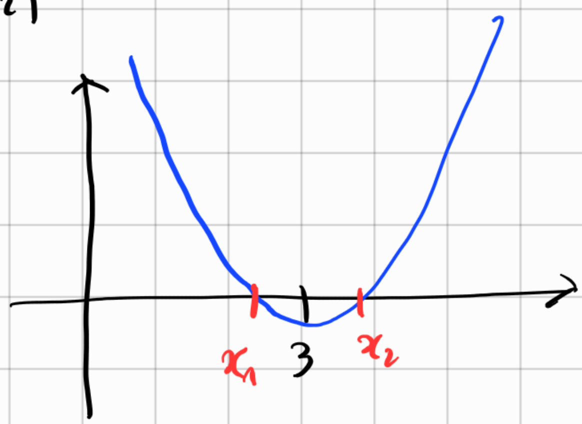
$f(3) = 3 - 3\ln 3$
$= 3(1-\ln 3) < 0$

teorema degli zeri

$\exists!\ x_1 \in (0,3)$ t.c. $f(x_1) = 0$

$\exists!\ x_2 \in (3,+\infty)$ t.c. $f(x_2) = 0$

$x_1 < 3 < x_2$



□

Trovare la prima cifra decimale di x_1 e x_2.

↳ metodo di bisezione.