ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 30 - 4.12.2024

DERIVATE delle FUNZIONI ELEMENTARI

$$(mx+q)' = m \qquad m, q \text{ fissati}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad n \in \mathbb{N},\ n > 0$$

per induzione:
- $(x^1)' = 1 = 1 \cdot x^0 \quad n=1$
- $(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n$

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{1}{(x^n)^2} \cdot nx^{n-1} = -nx^{-n-1}$$

Teorema (derivata della funzione inversa)

f invertibile (f^{-1} funzione inversa), f derivabile in un punto x_0 e f^{-1} continua in $f(x_0)$.
Se $f'(x_0) \neq 0$ allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(\underbrace{f^{-1}(y_0)}_{y})}$$

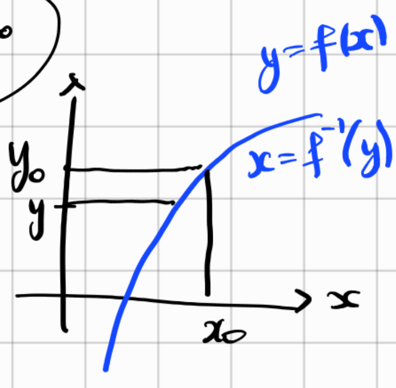
dim

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$y = f(x)$
$x = f^{-1}(y)$
$x \to x_0$
$\Uparrow$ f^{-1} è continua in y_0
$y \to y_0$

$\blacksquare$

Se $f'(x_0) = 0$
f^{-1} non è derivabile in y_0
(derivata "infinita")



OSS $f : I \to J$, I intervallo

Se f strettamente monotona $\Rightarrow$ iniettiva , $J = f(I) \Rightarrow$ suriettiva

$$\underbrace{\text{iniettiva} \qquad \text{suriettiva}}_{\text{invertibile}}$$

$f^{-1} : J \to I$ è continua.

$f(x) = \sqrt[n]{x}$ $\qquad f = g^{-1}$ $\qquad g(y) = y^n$ $(y \geq 0$ se n pari$)$

$g'(y) = n y^{n-1}$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} e^x \cdot 1 = e^x.$$

$$(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a$$

$$= \ln a \cdot a^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \qquad (x>0)$$

$x>0$

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$(x^{\alpha})' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x}\cdot \frac{\alpha}{x}$$

$\boxed{\begin{matrix}\alpha\in\mathbb{R}\\ x>0\end{matrix}}$

$$= x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x} = \alpha\, x^{\alpha-1}$$

$$a^b \quad \begin{cases} a>0 & b\in\mathbb{R} \\ a\in\mathbb{R} & b\in\mathbb{N} \\ a\in\mathbb{R},\ a\neq 0 & b\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \cos x$$

$\frac{\sin h}{h} \to 1$

per $h\to 0$ $\quad \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = -\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{\sin h}{1+\cos h} \longrightarrow 0$

$\frac{\sin h}{h}\to 1$, $\frac{\sin h}{1+\cos h}\to 0$

$(\cos x)' = -\sin x$

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$

$$= \cos x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} - \sin x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \to -\sin x$$

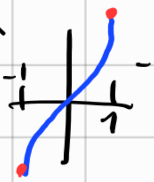
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \operatorname{tg}^2 x \end{cases}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

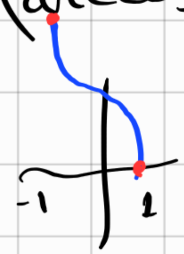
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

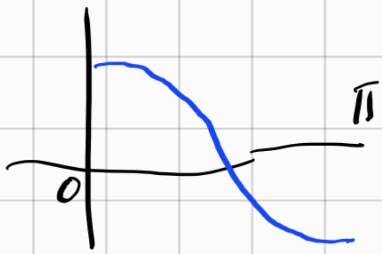


$-1 < x < 1$

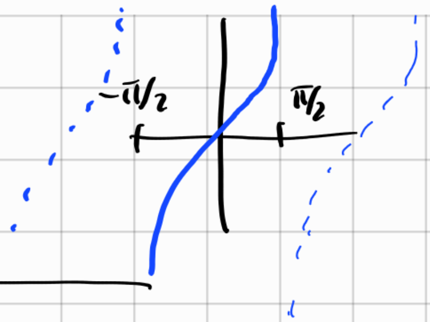
$$\| \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$





$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$



In campo complesso le formule sono le stesse.

$$(e^z)' = e^z \Leftarrow \boxed{\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z} = 1.}$$

A QUESTO PUNTO • SAPPIAMO DERIVARE QUALUNQUE ESPRESSIONE COMPOSTA DA FUNZIONI ELEMENTARI [⚠ SALVO CAVILLI]

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

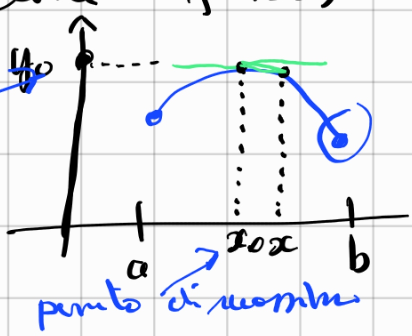
ES $$f(x) = \frac{\sqrt{1-\sin^2(x+\pi)}}{e^{\sqrt{x}}}$$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{-2\sin(x+\pi)\cos(x+\pi)}{2\sqrt{1-\sin^2(x+\pi)}}\cdot e^{\sqrt{x}} - \sqrt{1-\sin^2(x+\pi)}\cdot e^{\sqrt{x}}\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(e^{\sqrt{x}}\right)^2}$$

TEOREMI SULLE DERIVATE PER ARRIVARE AI CRITERI DI MONOTONIA

Teorema (Fermat) Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Se $x_0\in(a,b)$ è un punto di massimo o minimo (relativo) di f (e $\exists\, f'(x_0)$) allora $f'(x_0)=0$.

(valore) massimo



dim

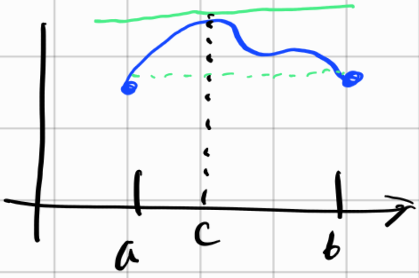
se $x > x_0$ $$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0 \Rightarrow f'(x_0)\le 0$$

Se $x < x_0$ $\quad \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$ □

Teorema (Rolle) Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua su $[a,b]$, e derivabile su (a,b).

Se $f(a)=f(b)$ $\exists\, c\in(a,b)$ t.c. $f'(c)=0$.



dim Weierstrass f ha massimo e minimo su $[a,b]$ (chiuso e limitato).

- Se uno dei punti di max o min. è interno in (a,b) applico Fermat e ho finito.
- Altrimenti max e minimo sono a e/o b.

ma $f(a)=f(b)$ $\quad \max f = \min f \Rightarrow f$ costante

$\Downarrow$

$f'=0$ su (a,b)

□

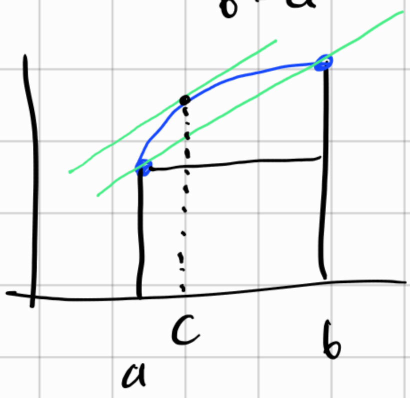
Teorema (Lagrange) Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e derivabile su (a,b).

Allora $\exists\, c\in(a,b)$ t.c.

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}} = f'(c)$$

dim

$$g(x) = f(x) - m \cdot x \qquad m = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$



si verifica: $g(b) = g(a)$

Rolle $\Rightarrow \exists c \quad g'(c) = 0$

$$g'(c) = f'(c) - m$$

$\square$