ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 26 - 22.11.2024

SERIE $\sum a_k$ $\quad a_0 + \dots + a_{n-1} = S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

- condizione necessaria per la convergenza: $a_k \to 0$
- $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ se $|q|<1$.

SERIE A TERMINI POSITIVI

$\sum a_k \qquad a_k \geq 0.$

$$S_{n+1} = S_n + a_n \geq S_n \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

S_n è crescente dunque regolare: o converge / o diverge a $+\infty$.

Criterio del confronto

$$0 \leq a_k \leq b_k \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

in particolare se $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k < +\infty$ (è convergente)

allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k < +\infty$ (è convergente).

l'abbiamo usato per dire che $\sum \frac{1}{k^2}$ è convergente

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k^2+k} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k} = 1 \text{ (telescopica/Mengoli)}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k} = 1$$

è convergente

$j=k+1$

$\sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{j^2}$ converge $\qquad \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2}$ converge.

... confronto: $\quad 0 \le a_n \quad 0 \le b_n \qquad a_n << b_n \qquad \left(\frac{a_n}{b_n} \to 0 \right)$

allora se $\sum b_n$ è convergente anche la $\sum a_n$ è convergente.

dim

se $a_n << b_n$ definitivamente $a_n \le b_n$ □

$$\frac{a_n}{b_n} \to 0 \qquad \frac{a_n}{b_n} \le 1$$

... confronto asintotico:

Notazione: $a_n \sim b_n$

a_n è asintoticamente equivalente a b_n se $\frac{a_n}{b_n} \to 1$.

Se $a_n \geq 0$, $b_n \sim a_n$
$(b_n \geq 0)$

allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere.

dim $\qquad \frac{a_n}{b_n} \to 1 \qquad$ definitivamente $\frac{1}{2} \le \frac{a_n}{b_n} \le 2$

definitivamente: $\frac{1}{2} b_n \le a_n \le 2 b_n \quad \dots$ □

ES $\quad \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k^2+k} \qquad$ infatti $\quad \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2+k}} = \frac{k^2+k}{k^2} = 1 + \frac{1}{k} \to 1$

dunque $\sum \frac{1}{k^2}$ ha lo stesso carattere di $\sum \frac{1}{k^2+k} = 1$

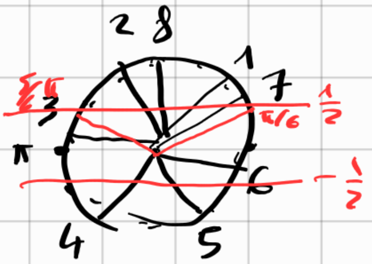
ES Dire se converge: $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{k}}{k}$

Ricordiamo $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad$ ovvero $\quad \sin x \sim x$ per $x \to 0$

Dunque $\dfrac{\sin\frac{1}{k}}{k} \sim \dfrac{\frac{1}{k}}{k} = \dfrac{1}{k^2}$ per $k\to\infty$ $\quad x=\frac{1}{k}\to 0$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}}=1$

$\sum \frac{1}{k^2}$ converge $\Rightarrow \sum \dfrac{\sin\frac{1}{k}}{k}$ converge.



ES $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \sin k$ che carattere ha?

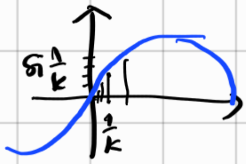
non è a termini positivi.
Vale la condizione necessaria per la convergenza?
$\sin n \to 0$ per $n\to\infty$?

frequentemente $\sin n \geq \frac{1}{2}$
e frequentemente $\sin n \leq -\frac{1}{2}$. $\Rightarrow$ non può avere limite.

La serie $\sum_{k=1}^{\infty}\sin k$ non è convergente

[Esercizio molto difficile
sapendo che $\pi\notin\mathbb{Q}$
dimostrare che l'insieme L
dei punti limite di $\sin n$
è $L=[-1,1]$]

[Domanda: è divergente o indeterminata]



SERIE ARMONICA

ES $\quad \sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{1}{k} \qquad \sin\frac{1}{k}\sim\frac{1}{k}>0$

$\hookrightarrow$ ha lo stesso carattere di $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$

SERIE ARMONICA $\quad \sum \frac{1}{k}=+\infty$.

$a_k=\frac{1}{k}$

$$\underbrace{1}_{1}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{2,\ j=1}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}_{4\text{ addendi},\ j=2}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{15}}_{8\text{ addendi},\ j=3}+\frac{1}{16}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \geq & \geq & \geq & \geq & \geq & \geq & \geq \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{array}$$

$j=0$

una stretta

$$\geq \overset{j=0}{\frac{1}{2}} + \overset{j=1}{\underbrace{2\cdot\frac{1}{4}}} + \overset{j=2}{4\cdot\frac{1}{8}} + \overset{j=3}{8\cdot\frac{1}{16}} + \dots$$

$$S_{2^n-1} = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{2^j}{2^{j+1}} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{n}{2} \longrightarrow +\infty$$

$\Downarrow$

$S_n \to +\infty$ (perché S_n non è indeterminata $a_k = \frac{1}{k} > 0$) $\square$

Teorema (criterio di condensazione di Cauchy)

Sia $a_n > 0$, a_n decrescente. Allora la serie $\sum_k a_k$ ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_j 2^j \cdot a_{2^j}$$

dim uguale a prima: $2^j a_{2^{j+1}} \leq \overbrace{a_{2^j} + a_{2^j+1} + \dots + a_{2^{j+1}-1}}^{2^j \text{ addendi}} \leq 2^j \cdot a_{2^j}$

e $\sum 2^j a_{2^{j+1}} = \frac{1}{2}\sum 2^{j+1} a_{2^{j+1}}$ ha lo stesso carattere di $\sum 2^j a_{2^j}$ $\square$

serie armonica generalizzata

ES $\boxed{\sum \frac{1}{k^p}}$ $p \in \mathbb{R}$ fissato

$\boxed{p=1}$ serie armonica è divergente
$p=2$ (Basilea) è convergente

criterio di Cauchy:
ha lo stesso carattere di:

$$\sum 2^j \cdot \frac{1}{(2^j)^p} = \sum 2^{j-pj} = \sum \left(2^{1-p}\right)^j = \sum q^j$$

$q = 2^{1-p}$

converge se $|2^{1-p}| < 1$

se $p > 1$ $q = 2^{1-p} = \frac{1}{2^{p-1}} < 1$ è convergente

se $p \leq 1$ $q = 2^{1-p} \geq 1$ è divergente

ES $\sum \frac{1}{\sqrt{k^2+k}}$

diverge

$$\frac{1}{\sqrt{k^2+k}} = \frac{1}{\sqrt{k^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}} \sim \frac{1}{\sqrt{k^2}} = \frac{1}{k}$$

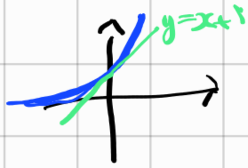
$\sum \frac{1}{k} = +\infty$

ES $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ è divergente $\quad \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{k^{1/2}}$

$\frac{1}{2} \leq 1$

ES $\sum \left(\sqrt[k]{2} - 1\right) = +\infty$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad e^x - 1 \sim x \text{ per } x \to 0$$



$$\sqrt[k]{2} - 1 = 2^{\frac{1}{k}} - 1 = e^{\frac{\ln 2}{k}} - 1 \sim \frac{\ln 2}{k}$$

$$\sum \frac{\ln 2}{k} = \ln 2 \sum \frac{1}{k} = +\infty$$

Es (🏠) Per quali p e q la serie

$$\sum \frac{1}{k^p (\ln k)^q}$$

converge?

Osservazione

$$\frac{1}{k^2 \ln^7 k} \ll \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k} \ln^7 k} \gg \frac{1}{k^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$$

$\boxed{\text{L'unico caso rilevante è } p=1}$