ANALISI MATEMATICA B

Successioni reali

$a_n = f(n) \qquad f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n} a_n$$

($+\infty$ è l'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$)

Def (carattere di una successione)
a_n successione. Si potrà avere uno e uno solo dei seguenti casi:

(1) $a_n \to l \in \mathbb{R}$ — a_n è CONVERGENTE

(2) $a_n \to +\infty$ o $a_n \to -\infty$ — a_n è DIVERGENTE

(1), (2): REGOLARE

(3) a_n non ha limite — a_n è INDETERMINATA

Esempi

(1) $a_n = \dfrac{1}{n+1} \to 0$ è convergente

(3) $a_n = (-1)^n$ è indeterminata.

(2) $a_n = n \to +\infty$ è divergente

- $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$
- oppure $a_n = n$ è crescente

$$\lim a_n = \sup a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup \mathbb{N} = +\infty$$

Esercizio $a_n = n!$ è divergente.

$\boxed{n! \geq n}$ ← si dimostra per induzione (es. 🏠)

quindi visto che $n \to +\infty$ $n! \geq n$ anche $n! \to +\infty$.

Teorema (confronto) Per $x \to x_0$ $\ell, m \in \overline{\mathbb{R}}$

1. se $f(x) \leq g(x)$ e $\left.\begin{array}{l} f(x) \to \ell \\ g(x) \to m \end{array}\right\} \Rightarrow \ell \leq m$

(Basta in un intorno di x_0)

dim Se fosse $\ell > m$ ℓ f, m g $\Rightarrow f > g$ in un intorno di x_0 assurdo.

2. se $f(x) \leq g(x)$ e $f(x) \to +\infty$
allora $g(x) \to +\infty$.

dim ovvio. Basta prendere per g gli stessi intorni di f nella definizione di limite.

3. (2 carabinieri) se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, $f(x) \to \ell$, $g(x) \to \ell$

allora $h \to \ell$.

dim ℓ f e g stanno in un intervallo/intorno di ℓ
$\Downarrow$
anche h sta nello stesso intorno.

Nota: l'insieme delle successioni convergenti è uno spazio vettoriale (reale).

a_n convergente, b_n convergente $\Rightarrow$ a_n+b_n è convergente

$t \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $t \cdot a_n$ è convergente

---

trovare a_n, b_n divergenti tali che $a_n + b_n$ è indeterminata.

---

trovare a_n, b_n indeterminata tali che a_n+b_n sia convergente.

---

def Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ è LIMITATA

se $f(A)$ è un sottoinsieme LIMITATO di $\mathbb{R}$.

ovvero $\exists M \in \mathbb{R}$ $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in A$.

Lo stesso si applica alle successioni.

Se non è limitata diremo che è ILLIMITATA.

Teorema a_n convergente $\Rightarrow$ a_n è limitata |||

a_n divergente $\Rightarrow$ a_n è illimitata.

ES $(-1)^n$ è limitata e indeterminata

$n \cdot (-1)^n$ è illimitata e indeterminata.

dim (teo). a_n convergente $\Rightarrow$ $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

$U = (\ell-1, \ell+1)$ è un intorno di ℓ.

$\exists$ un intorno V di $+\infty$ t.c. $n \in V \Rightarrow \underline{a_n \in U}$

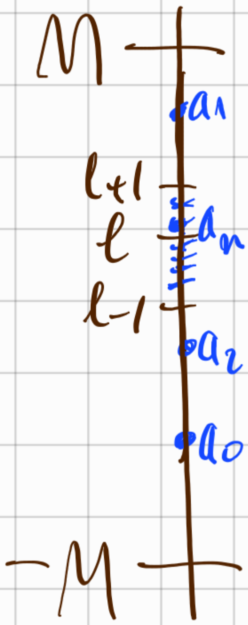
$$V = (M, +\infty] \qquad n \in V \Leftrightarrow n > M \qquad m = \lfloor M \rfloor$$

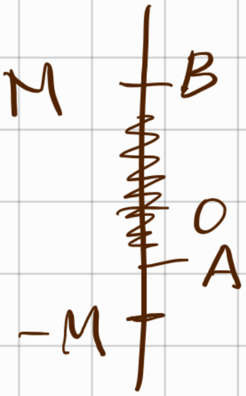
$$\underbrace{a_0, a_1, a_2, \dots, a_m}_{\text{sono un numero finito}}, \underbrace{a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n, \dots}_{\text{stanno in } (\ell-1, \ell+1)}$$

$$\rightarrow M = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_m|, \underline{|\ell|+1}\} \qquad M \in \mathbb{R}$$

$$\forall n \qquad -M \le a_n \le M$$

$\square$





$$M = \max\{|B|, |A|\}$$

Notazione. Un predicato $P(n)$ si dice essere vero DEFINITIVAMENTE se $\exists M$ t.c. $P(n)$ è vero $\forall n > M$.

|| def.

$\exists M \; \forall n > M : P(n)$

ES definitivamente $n^2 - 10n > 1000n$

- Un predicato $P(n)$ si dice essere vero **FREQUENTEMENTE** se $\forall M \; \exists n > M$ tale che $P(n)$ è vero.

  FREQUENTEMENTE = freq.

  $\forall M \; \exists n > M \; P(n)$

ES
- n è frequentemente primo
- n è frequentemente un quadrato perfetto.

Proprietà non def. P $\Leftrightarrow$ freq. non P

non freq. P $\Leftrightarrow$ def. non P.

ES $a_n \to \ell$ $\quad \forall U$ intorno di ℓ def. $a_n \in U$

$\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_\ell : \exists V \in \mathcal{U}_{+\infty} : n \in V \Rightarrow a_n \in U$.

OSS freq. P $\Leftrightarrow$ $P(n)$ vale per infiniti $n \in \mathbb{N}$.

OSS def. P $\Rightarrow$ freq P.

ES $(-1)^n = 1$ freq. ma non def.

SUCCESSIONI MONOTONE

a_n è crescente se $\quad n \geq m \Rightarrow a_n \geq a_m$

" decrescente " $\quad a_n \leq a_m$

strett. cresc. $\quad n > m \Rightarrow a_n > a_m$

strett decres. " $\quad a_n < a_m$.

<u>Osservazione</u> a_n crescente $\Leftrightarrow \forall n \quad a_{n+1} \geq a_n$ $(*)$

$\Rightarrow$ ovvio

$\Leftarrow$ per induzione

CRITERIO di MONOTONIA

$$a_{10} \geq a_7 \Leftarrow \underset{(*)}{a_{10} \geq a_9} \underset{(*)}{\geq a_8} \underset{(*)}{\geq a_7}$$

<u>Es</u> $n!$ è crescente. Basta verificare che

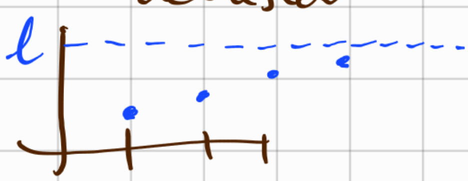
$$(n+1)! \overset{?}{\geq} n! \qquad (n+1)! = (n+1)\cdot n! \underset{\substack{\Uparrow \\ n+1 \geq 1 \\ \Uparrow \\ n \geq 0}}{\geq} n!.$$

<u>Teorema</u> a_n monotona $\Rightarrow a_n$ ha limite (è regolare)

<u>dim</u> già fatto per le funzioni.

se a_n è crescente si dimostra $\lim a_n = \sup a_n$.

" decrescente " " $\inf a_n$.



Corollario a_n monotona e limitata è convergente

$$\left(|a_n| \le M \quad e \quad a_n \to \ell \quad \Rightarrow \quad \ell \le M \right)$$

LA COSTANTE e DI NEPERO

Teorema la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è convergente.

Def. $e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

dim $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \neq 0)$

① a_n è crescente ? $\qquad a_{n+1} \ge a_n$ ovvero $a_n \ge a_{n-1}$

$$a_n \overset{?}{\ge} a_{n-1} \iff \frac{a_n}{a_{n-1}} \overset{?}{\ge} 1$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)$$

$$= \left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = (*)$$

[Disuguaglianza di Bernoulli: $(1+x)^n \ge 1+nx \quad \forall x \ge -1$
PROSSIMA VOLTA]

$$(*) \overset{x=-\frac{1}{n^2}}{\ge} \left(1-n\cdot\frac{1}{n^2}\right)\frac{n}{n-1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right) = \frac{n-1}{n}\,\frac{n}{n-1} = 1$$

(2) $a_n \le b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$

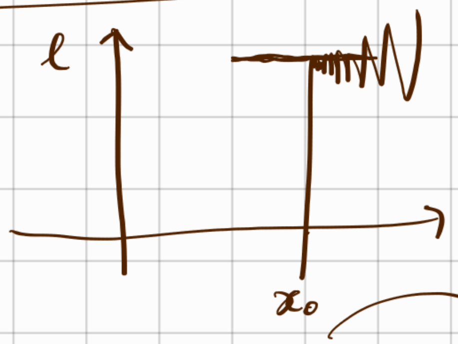
si dimostra, come sopra, b_n è decrescente!

$a_n \to \ell \le 4.$

$a_n \le b_n \le b_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1} = 2^2 = 4$

□

$(a_n \in \mathbb{Q})$



$f(x) = \ell$ $\quad \boxed{f(x) \neq \ell}$

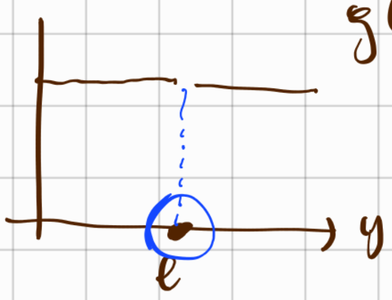
$g(f(x)) \to q$

$\underbrace{f(x) \to \ell \quad x \to x_0 \qquad g(y) \to q \text{ se } y \to \ell}$

$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = 0$

$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y = \ell \\ 1 & \text{se } y \neq \ell \end{cases}$

$\lim_{y \to \ell} g(y) = 1$



$g(y) = 1$ se y $\qquad g \to 1$ se $y \to \ell$

$g(f(x)) = g(\ell) = 0$

$x \neq x_0$

Oppure g continua. (anche se $f(x)=\ell$ in

$\Updownarrow$

$$\lim_{y\to\ell} g(y)=g(\ell)$$

$$y=g(x)$$

$$f(x)=\ell$$

$$\Downarrow$$

$$g(f(x))=g(\ell)$$