ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 18 - 4.11.2024

- limite, punti di accumulazione, unicità $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$
  o $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

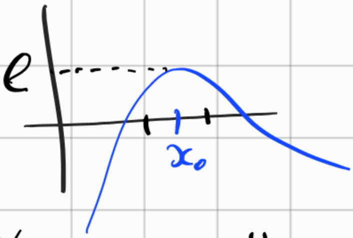
- operatore $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

- località del limite
- restrizione del limite $H(x) = \_\_\_$
- limite dx e sx
- limite della funzione composta

  $$\left.\begin{array}{l} \text{(se) } f(x) \neq y_0 \text{ per } x \neq x_0 \\ y = f(x) \to y_0 \text{ per } x \to x_0 \\ g(y) \to \ell \text{ per } y \to y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(f(x)) \to \ell \text{ per } x \to x_0$$

- limite di fn. monotona

- permanenza del segno



$f(x) \to \ell > 0$
per $x \to x_0$
allora $f > 0$
in un intorno di x_0

ES Se $f(x) > c$ ($\geq$) $\forall x$
e $f(x) \to \ell$ per $x \to x_0$
allora $\ell \geq c$

- <u>operazioni con i limiti</u> $f(x) \to \ell_1$, $g(x) \to \ell_2$

  $f(x) + g(x) \to \ell_1 + \ell_2$

lo stesso col prodotto, sottrazione e divisione.

$x \to x_0$, f continua in x_0
$f(x) \to f(x_0)$

<u>SALVO</u> le forme indeterminate.

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ $(+\infty) + \ell = +\infty$

$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ $(-\infty) + \ell = -\infty$

F.I. $\left[\begin{array}{l} (+\infty) + (-\infty) = ? \\ (-\infty) + (+\infty) = ? \end{array}\right.$

ES $f(x) = x^2$ $g(x) = -x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + g(x) = ?$

per $x \to +\infty$ $\quad x^2 + (-x) = \boxed{x^2 - x}$ (F.I.)

rimaneggio l'espressione

$$x^2 - x = x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) \longrightarrow (+\infty \cdot +\infty) \cdot \left(1 - \frac{1}{+\infty}\right)$$

per $x \to +\infty$

$\frac{1}{x} \to 0 \qquad 1 - \frac{1}{x} \to 1 - 0 = 1$

$x^2 \to +\infty$

$= +\infty \cdot 1$

$= +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{per } x \to +\infty \quad \frac{1}{x} \to 0$$

$\frac{1}{x} \to 0^+$ ← si può scrivere.

$\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \right.$ ← formalmente non si può scrivere $\left. \right)$

Tipicamente se ho $(+\infty) + (-\infty)$ $\quad \boxed{(+\infty) - (+\infty)}$

bisogna riconoscere l'"infinito "più grande"
e metterlo in evidenza (raccoglierlo a fattor comune)

Per il prodotto:

FI

$0 \cdot (+\infty) \qquad 0 \cdot (-\infty) = -(0 \cdot (+\infty))$

$\frac{0}{0}$

$\frac{+\infty}{+\infty} = \frac{+\infty}{-\infty} = \frac{-\infty}{+\infty} = -\frac{+\infty}{+\infty}$

Forme indeterminate.

$\frac{-\infty}{-\infty} = \frac{+\infty}{+\infty}$

Se $f(x) \to l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $g(x) \to 0$ $\qquad \frac{f(x)}{g(x)} \to \infty$ ovvero $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \to +\infty$

ES $\quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ non esiste ma $\quad \lim_{x\to 0} \left|\frac{1}{x}\right| = +\infty$

$\not\Downarrow$ restrizione

$\lim_{x\to 0^+} \left|\frac{1}{x}\right| = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

località del limite $\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

(Ma potremmo scrivere $\frac{1}{x} \to \infty$ per $x \to 0$).

ES $\quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x} \quad$ F.I $\frac{0}{0}$

$$\frac{x^2-x}{x} = x-1 \longrightarrow -1 \quad \text{per } x\to 0$$

Potenze? $\quad \begin{array}{l} f(x)\to \ell \\ g(x)\to m \end{array} \implies f(x)^{g(x)} \longrightarrow \ell^m$

salvo forme indeterminate.

$$f(x)^{g(x)} = a^{g(x)\log_a f(x)}$$

ES
- $1^{+\infty}$ è una forma indeterminata.

$$1^{+\infty} = a^{+\infty\cdot\log_a 1}$$

- $0^0 = a^{0\cdot \log_a 0}$ è una F.I.

lo zero a esponente è intero.

$0^0 = 1$ per voi ma è una forma indeterminata.

Es (su $\mathbb{C}$)

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{C}}} \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2-z}$$

per $z\to 0$ $\quad \frac{1}{z}\to\infty$

$z^2 \to 0\cdot 0 = 0$

$z^2 - z \to 0-0=0$

$\frac{1}{z^2-z} \to \frac{1}{0} = \infty$

$\infty - \infty$ è una forma indeterminata

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2-z} = \frac{z-1-1}{z(z-1)} = \frac{z-2}{z(z-1)} \longrightarrow \frac{0-2}{0\cdot(0-1)} = \frac{-2}{0} = \infty$$

per $z\to 0$, $z\in\mathbb{C}$

non ci sono più forme indeterminate

Non si può "passare al limite" una sola parte di una espressione.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x+x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x+0} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

??

Vero, ma non giustificato

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x+x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{0+x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$$

NO

E' meglio non scrivere l'operatore di limite ad ogni passaggio:

$$\frac{x}{x+x^2} = \frac{x}{x+0}$$

FALSO

per $\boxed{x \to 0}$

Modo giusto:

$$\frac{x}{x+x^2} = \frac{1}{1+x} \longrightarrow \frac{1}{1} = 1.$$

se scrivessi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1} = 1$$

è corretto ma
- sto facendo una affermazione più debole
- è più lungo da scrivere

SUCCESSIONI

$\underline{a} = \mathbf{a} = \vec{a}$

Una funzione $\underline{a} : \mathbb{N} \xrightarrow{\subset \mathbb{R}} \mathbb{R}$ (o $\mathbb{N} \to X$, X qualunque) si dice essere una SUCCESSIONE.

$$\underline{a} = \{ 0 \mapsto a_0, 1 \mapsto a_1, \ldots, n \mapsto a_n, \ldots \}$$

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \in \mathbb{R}.$$

$$\underline{a} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \qquad \underline{a} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \simeq \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots$$

Analogo finito $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ $\quad \underline{a} = (a_0, a_1, a_2)$, $\; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ $\qquad$ $\underline{a} : \{0,1,2\} \to \mathbb{R}$

$$\underline{a} = \{0 \mapsto a_0,\ 1 \mapsto a_1,\ 2 \mapsto a_2\}$$
$$\cong (a_0, a_1, a_2).$$

Notazione: invece di scrivere $\underline{a}(k) = a_k$

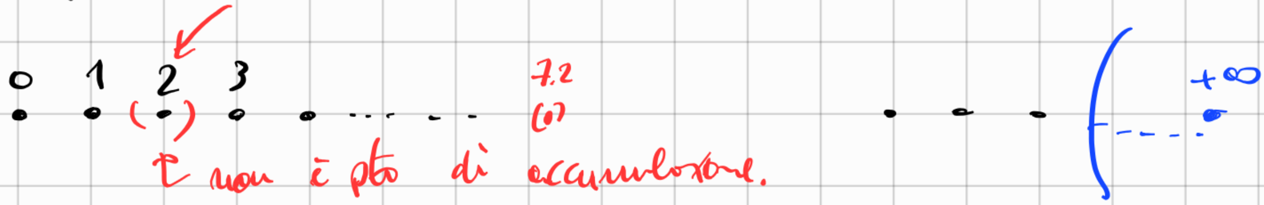
$$\underline{a} = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

Piccola ambiguità: $\frac{1}{k+1}$ è il $(k+1)$-esimo termine della successione $\underline{a}(k) = \frac{1}{k+1}$

Spesso diremo che $\frac{1}{k+1}$ è l'intera successione, pensando a $\left(\frac{1}{k+1}\right)_{k \in \mathbb{N}}$.

Che limiti posso fare? $\quad$ dom $\underline{a} = \mathbb{N}$

l'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$ è $+\infty$



$+\infty$ è l'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$.

Posso considerare $\lim_{k \to +\infty} \underline{a}(k)$ cioè $\lim_{k \to +\infty} a_k$

Esempio 1

$$\lim_{\substack{k \to +\infty \\ (k \in \mathbb{N})}} \frac{1}{k+1} = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \in \mathbb{R})}} \frac{1}{x+1} = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y} = 0$$

Restrizione

$$\begin{cases} y = x+1 \\ x+1 \to +\infty \text{ per } x \to +\infty \end{cases}$$

Esempio 2 $\lim_{k \to +\infty} (-1)^k = ?$

[$(-1)^x$ non ha senso se $x \in \mathbb{R}$.]

$a_k = (-1)^k$

k	0	1	2	3	4	5	...
a_k	1,	-1,	1,	-1,	1,	-1,	.....

NON HA LIMITE.

se k è pari $a_k = 1 \xrightarrow[k \to +\infty]{} 1$

se k è dispari $a_k = -1 \longrightarrow -1$

Se fosse $(-1)^k \to \ell$ avrei $\begin{cases} \ell = 1 \\ \ell = -1 \end{cases}$ assurdo.