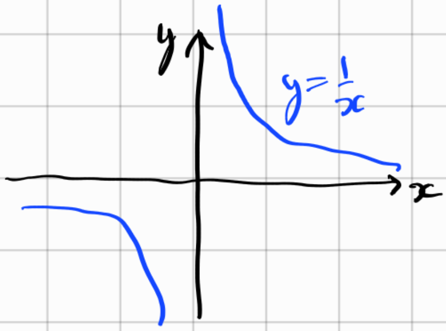
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 17 - 25.10.2024

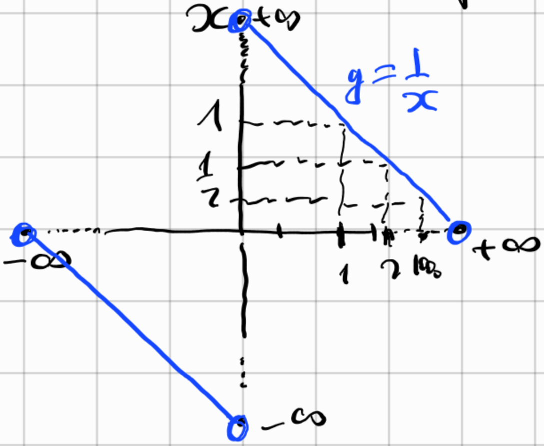
Punti all'∞

<u>ES</u>



Vorrei poter dire

$\frac{1}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$



$\frac{1}{+\infty} = 0$

possiamo assumerlo

Come si fanno i limiti (e la continuità) in $+\infty$ e $-\infty$?

Cosa vuol dire "vicino a $+\infty$"?

$+\infty - x = +\infty$

$\frac{1}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$

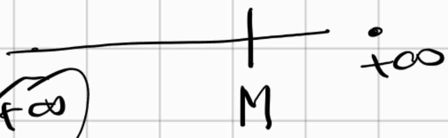
$0 = \ell$, $+\infty = x_0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \neq 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Non ha senso se $x_0 = +\infty$

$x_0 - \delta < x < \cancel{x_0 + \delta}$

Se $x_0 = +\infty$ $\quad f(x) \to \ell$ per $x \to +\infty$



$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 \ \forall x \neq 0 \quad x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$f(x) \to \ell$ per $x \to x_0$

ℓ: $-\infty$, $\mathbb{R}$, $+\infty$

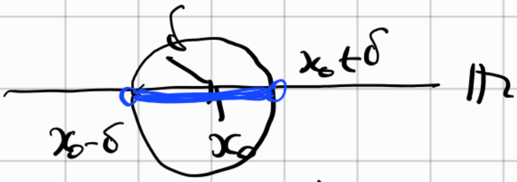
x_0: $-\infty$, $\mathbb{R}$ (x_0^+, x_0^-), $+\infty$

Unifichiamo le definizioni di limite (INTORNO BASILARE)

(✗) $\underline{\forall \varepsilon > 0}\ \exists \delta > 0 \quad x \neq x_0, x \in \operatorname{dom} f \quad \underline{|x - x_0| < \delta} \Rightarrow \underline{|f(x) - \ell| < \varepsilon}$

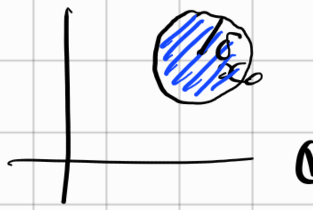
$f(x) \to \ell$ per $x \to x_0$

$|x - x_0| < \delta \iff x \in \{ t \in \mathbb{R} : |t - x_0| < \delta \} = B_\delta(x_0)$



Definiamo:

$$\mathcal{B}_{x_0} = \{ B_r(x_0) : r > 0 \}$$



limite $f(x) \to \ell$ per $x \to x_0$

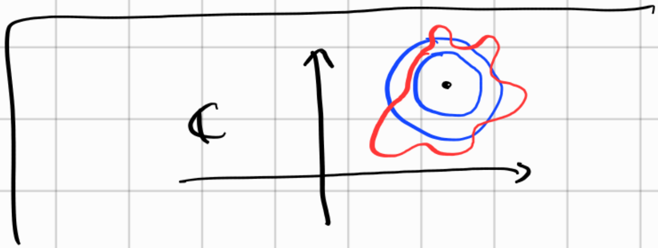
(✗) $\boxed{\forall U \in \mathcal{B}_\ell \ \exists V \in \mathcal{B}_{x_0} : x \neq x_0, x \in \operatorname{dom} f \quad x \in V \Rightarrow f(x) \in U}$

L'UNICA DEFINIZIONE DI LIMITE

si legge: U intorno di ℓ V intorno di x_0

Continuità in x_0:

$$\forall U \in \mathcal{B}_{f(x_0)} \ \exists V \in \mathcal{B}_{x_0} : \forall x \in \operatorname{dom} f \quad x \in V \Rightarrow f(x) \in U.$$



Basta definire:

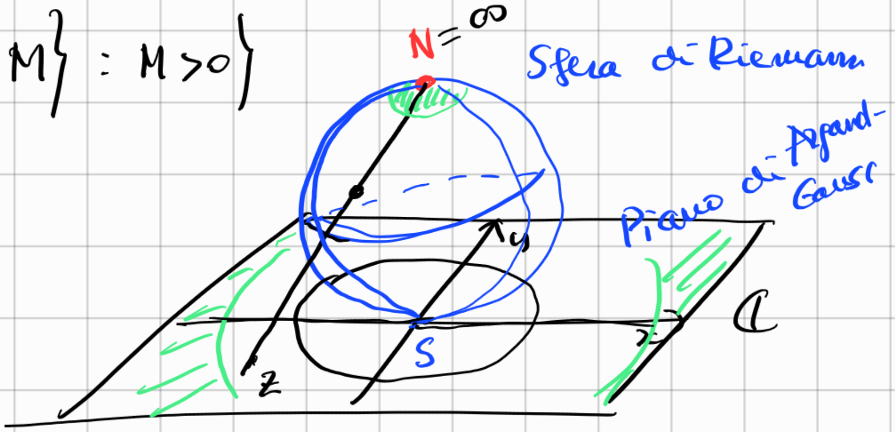
$$\mathcal{B}_{+\infty} = \left\{ (M, +\infty] : M \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{B}_{-\infty} = \left\{ [-\infty, M) : M \in \mathbb{R} \right\}$$

in $\mathbb{C}$:

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

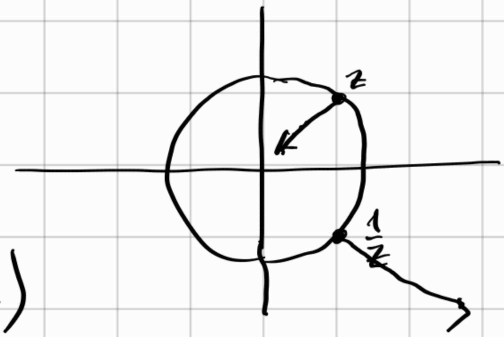
$$\mathcal{B}_{\infty} = \left\{ \{ z \in \mathbb{C} : |z| > M \} : M > 0 \right\}$$



Esempio Possiamo estendere $f(z) = \frac{1}{z}$ a tutto $\overline{\mathbb{C}}$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$\uparrow$



($\frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$ è l'inversione circolare)

$$\frac{1}{0} = \infty \qquad \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\frac{1}{z} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$$

$\frac{1}{z}$ è continua su tutto $\overline{\mathbb{C}}$:

$\frac{1}{z}$ è continua in $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (GIÀ VISTO)

$\frac{1}{z}$ è continua in $z_0 = 0$? $\qquad \frac{1}{0} = \infty$

$$\forall U \in \mathcal{B}_\infty \ \exists V \in \mathcal{B}_0 : \quad z \in V \Rightarrow \frac{1}{z} \in U$$

$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad |z| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| > M$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} > \frac{1}{\delta}$$ basta prendere $\delta = \frac{1}{M}$

Analogamente $\frac{1}{z}$ è continua in ∞

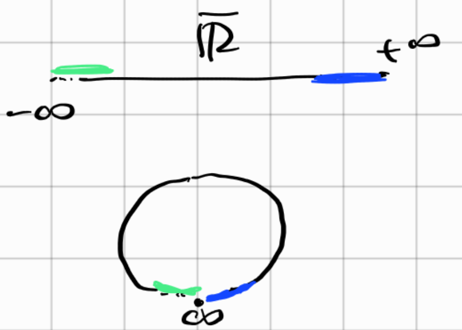
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 \quad |z| > M \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < \varepsilon$$

$$M = \frac{1}{\varepsilon}$$

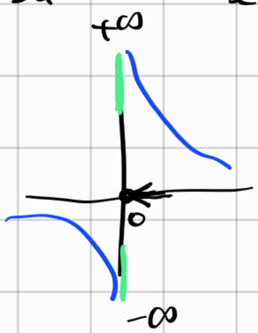
In particolare $\quad \frac{1}{x} \to 0$ per $x \to +\infty \quad (x \to \infty)$

su $\mathbb{R}$ $\quad \frac{1}{x} \to 0$ per $x \to -\infty \quad (x \to \infty)$

due possibili estensioni



Viceversa $\quad x \to 0 \quad \frac{1}{x} \to \infty$ ma non tende né a $+\infty$ né a $-\infty$



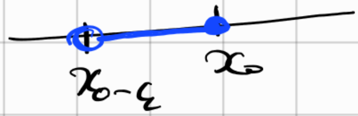
ma vorrei poter scrivere:

x tende a zero da destra.

$$\frac{1}{x} \to +\infty \quad \text{per} \quad x \to 0^+$$

$$\mathcal{B}_{x_0^+} = \{ [x_0, x_0 + r) : r > 0 \}$$

$\mathcal{B}_{x_0^-} = \{ (x_0 - r, x_0] : r > 0 \}$



Abbiamo definito $f(x) \to l$ per $x \to x_0$

	$x_0 \in \mathbb{R}$	x_0^+	x_0^-	$+\infty$	$-\infty$	∞
$l \in \mathbb{R}$						
l^+						
l^-						
$+\infty$						
$-\infty$		(*)				
∞						

36 definizioni di limite

(*) $f(x) \to -\infty$ per $x \to x_0^+$

$\forall U \in \mathcal{B}_{-\infty} \ \exists V \in \mathcal{B}_{x_0^+} : \forall x \in \mathrm{dom} f \setminus \{x_0\},\ x \in V \Rightarrow f(x) \in U$

$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{dom} f \setminus \{x_0\},\ x_0 < x < x_0 + \delta$

$\Downarrow$

$f(x) < -M$

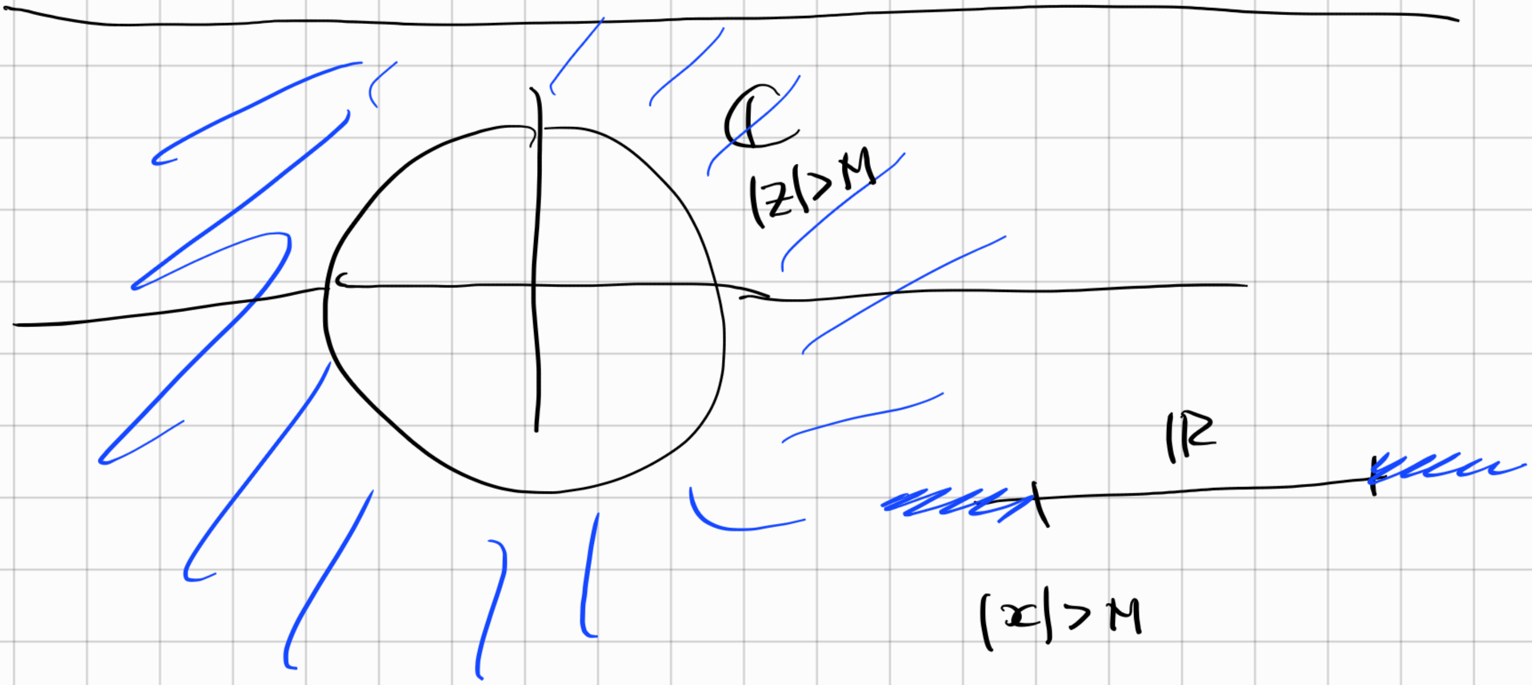
INTORNI vs INTORNI BASILARI

U è un intorno di x_0 se $\exists B \in \mathcal{B}_{x_0} : U \supseteq B$

$\mathcal{U}_{x_0} = \{\text{intorni}\}$ $\quad \mathcal{B}_{x_0} = \{\text{intorni basilari}\}$

Nella definizione di limite posso usare $\mathcal{B}_{x_0}$ o $\mathcal{U}_{x_0}$ indifferentemente (VERIFICARE)

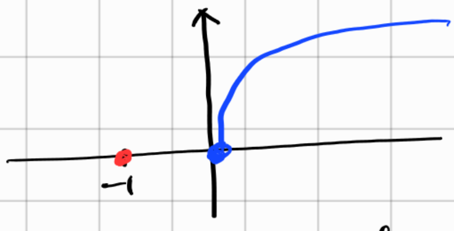
$$\mathcal{U}_{x_0} = \{ U \subseteq \mathbb{R} : \exists B \in \mathcal{B}_{x_0} : U \supseteq B \}$$



UNICITA' del LIMITE

Problema $\sqrt{x} \to 42$ per $x \to -1$

perché intorno a -1 non ci sono punti del dominio di $f(x) = \sqrt{x}$ dom $f = [0, +\infty)$



Decidiamo che questo limite non si può fare.

Def Sia $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ (o $\overline{\mathbb{C}}$), $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (o $\overline{\mathbb{C}}$)

diremo che x_0 è PUNTO DI ACCUMULAZIONE di A se $\forall U \in \mathcal{B}_{x_0}$ $(U \cap A) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.

Se x_0 non è punto di accumulazione per dom f

$f(x) \to \ell$ per $x \to x_0$ è sempre vera.

in particolare se $x_0 \in \operatorname{dom} f \Rightarrow f$ è continua in x_0

ES $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ è sempre continua.

Teorema Se x_0 è punto di accumulazione per $\operatorname{dom} f \subseteq \overline{\mathbb{R}}$

$$\text{se } \left\{ \begin{array}{ll} f(x) \to \ell_1 & \text{per } x \to x_0 \\ f(x) \to \ell_2 & \text{per } x \to x_0 \end{array} \right\} \text{ allora } \quad \ell_1 = \ell_2$$

(UNICITA' del limite)

Se x_0 è punto di accumulazione per dom f

possiamo scrivere $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

se $f(x) \to \ell$ per $x \to x_0$.

$\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ significa $\frac{1}{x} \to -\infty$ per $x \to 0^-$

Non ha senso scrivere $\lim_{x\to -1}\sqrt{x}$

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ non esiste

ma $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0$

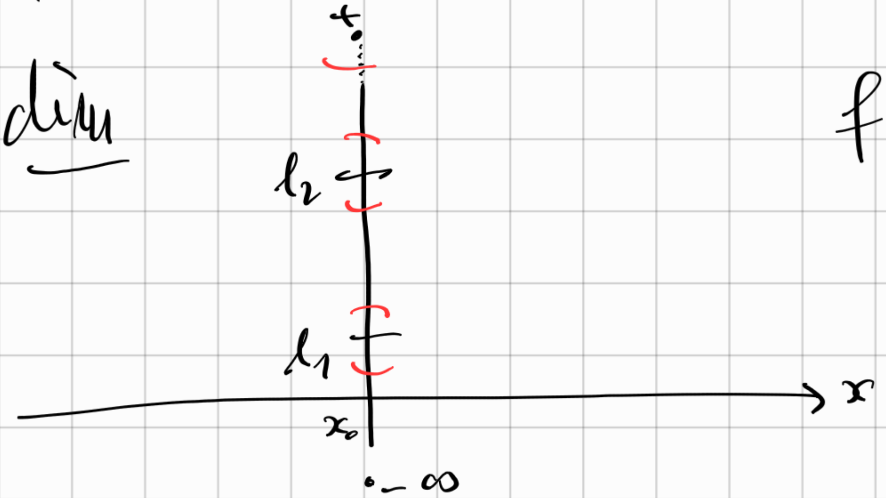
! $\frac{1}{x}\to\infty$ per $x\to 0$

$\frac{1}{x}\to 0^+$ per $x\to+\infty$

$\frac{1}{x}\to 0$ per $x\to+\infty$

---

dim



$f(x)\to l_1$

$f(x)\to l_2$

Basta osservare che se $l_1\neq l_2$

esistono $U_1\in\mathcal{B}_{l_1}$ $U_2\in\mathcal{B}_{l_2}$

tali che $U_1\cap U_2=\emptyset$ $\square$

Teorema (limite di funzione monotona)

Sia $f: A\to\mathbb{R}$ monotona.
Se x_0^+ è punto di accumulazione per A, $x_0\in[-\infty,+\infty)$
allora $\exists\lim_{x\to x_0^+} f(x)\in\overline{\mathbb{R}}$

$-\infty^+ = -\infty$

Se x_0^- è punto di accumulazione per A: $x_0 \in (-\infty, +\infty]$

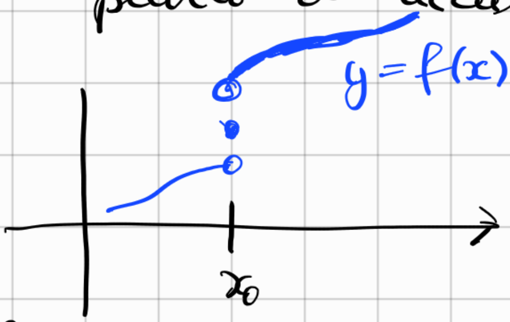
allora $\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ $\qquad +\infty^- = +\infty$

Più precisamente:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \begin{cases} \inf\{f(x) : x > x_0\} & \text{se } f \text{ crescente} \\ \sup\{f(x) : x > x_0\} & \text{se } f \text{ decrescente} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \begin{cases} \sup\{f(x) : x < x_0\} & \text{se } f \text{ crescente} \\ \inf\{f(x) : x < x_0\} & \text{se } f \text{ decrescente} \end{cases}$$

dim Supponiamo per fissare le idee f crescente, x_0^+ punto di accumulazione per A



Sia $\ell = \inf\{f(x) : x > x_0\}$

(1) $\forall x > x_0 \quad \ell \le f(x)$ (ℓ è un minorante)

(2) $\forall q > \ell \quad \exists x_1 > x_0 : f(x_1) < q$
(ℓ è il massimo dei minoranti
$\Rightarrow q$ non è un minorante)

$$x \in (x_0, x_1) \Rightarrow \ell \le f(x) \underset{f \text{ crescente}}{\le} f(x_1) < q$$

Per ogni U intorno di ℓ $\exists q$ t.c. $U \supseteq [\ell, q)$

$\exists$ V intorno di ℓ $\quad V = [x_0, x_1)$

$\forall x \in \mathrm{dom}\, f,\ x \neq x_0$

$x \in V \implies f(x) \in U.$

[Abbiamo però in considerazione anche il caso $x_0 = -\infty$ e $\ell = -\infty$]

$\square$