ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 12 - 14.10.2024

Numeri complessi $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

parte reale, parte immaginaria

$z = \boxed{x + iy}$

$w = a + ib$

$z + w = (x+a) + i(y+b)$

$\boxed{i^2 = -1}$

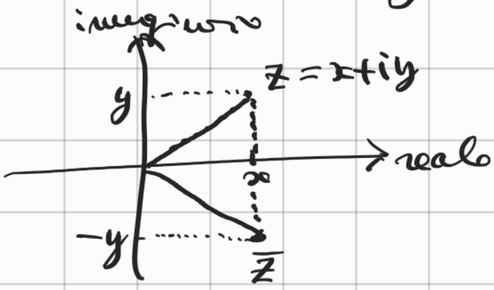
$z \cdot w = (ax - by) + i(ay + bx)$

$\mathrm{Re}\, z = x \in \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}\, z = y \in \mathbb{R}$

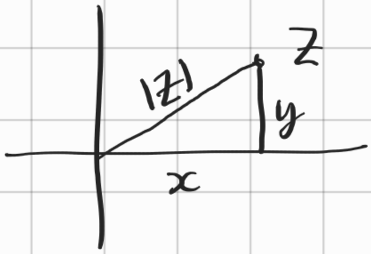
coniugato: $z = x + iy$

$\bar{z} = z^* = x - iy$



$$\begin{cases} \mathrm{Re}\, z = \dfrac{z+\bar{z}}{2} \\ \mathrm{Im}\, z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i} \end{cases}$$

modulo:



$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ $\qquad z\cdot\bar{z} \in \mathbb{R},\ z\cdot\bar{z} \geq 0.$

$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - (-1)\cdot y$

$= x^2 + y^2.$

Se $z \in \mathbb{R}$ $\quad z = x + \cancel{iy}$ $\quad y = 0$ $\qquad |z| = |x| = \sqrt{x^2}$

Proprietà:

$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ $\qquad$ immediato

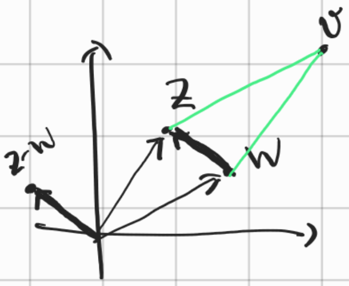
$\overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w}$

$$\begin{cases} z = x+iy \\ w = a+ib \end{cases} \qquad z\cdot w = ax-by+i(ay+bx)$$

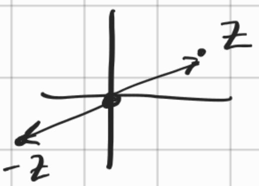
$$\overline{z\cdot w} = ax-by-i(ay+bx)$$

$$\bar{z}\cdot\bar{w} = (x-iy)(a-ib) = ax-by-i(ay+bx).$$

Modulo:



- $||z|| = |z|$
- $|-z| = |z|$
- $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$ ⊛
- $|z+w| \leq |z|+|w|$
- $|z-w| \leq |z-v|+|v-w|$



⊛ $z = x+iy$

$w = a+ib$

$$|z\cdot w|^2 = |\underbrace{ax-by}_{Re} + i\underbrace{(ay+bx)}_{Im}|^2 = (ax-by)^2+(ay+bx)^2$$

$$= a^2x^2+b^2y^2-\cancel{2axby}+a^2y^2+b^2x^2+\cancel{2aybx}$$

$$(|z|\,|w|)^2 = |z|^2\cdot|w|^2 = (x^2+y^2)(a^2+b^2) = a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$$

Qual è il reciproco $w = \frac{1}{z}$ di $z = x+iy$ $\qquad z \neq 0 \Leftrightarrow |z|>0$

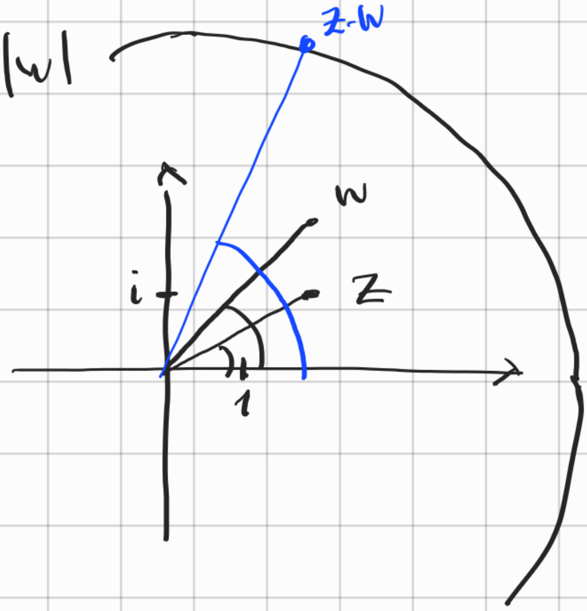
$w\cdot z = 1 \qquad z\cdot\bar{z} = |z|^2$

$$z\cdot\frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}}$$

Interpretazione geometrica del prodotto.

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

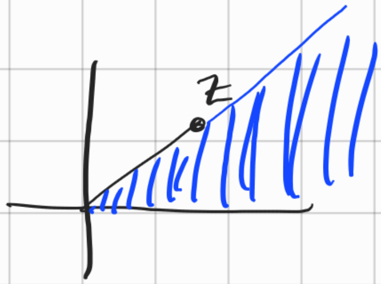


$|w| = 2\sqrt{2}$

$|z| = \sqrt{5}$

$|w| \cdot |z| = 2\sqrt{10}$

"Arg z" = l'angolo formato da z con l'asse positivo delle x



$$\text{"}\operatorname{Arg}(\underbrace{z \cdot w}) = \underbrace{\operatorname{Arg} z} + \underbrace{\operatorname{Arg} w}\text{"}$$

Fissato $w = a + ib$

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto w \cdot z \end{aligned}$$
A_w

$\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale reale di $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

$A_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad A_w(z) = w \cdot z$ $\quad w = a + ib$

$z = x + iy$

$$w \cdot z = \underbrace{(ax - by)} + i\,\underbrace{(bx + ay)}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

matrice associata all'applicazione lineare A_w.

$1 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad i \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

LINEARE

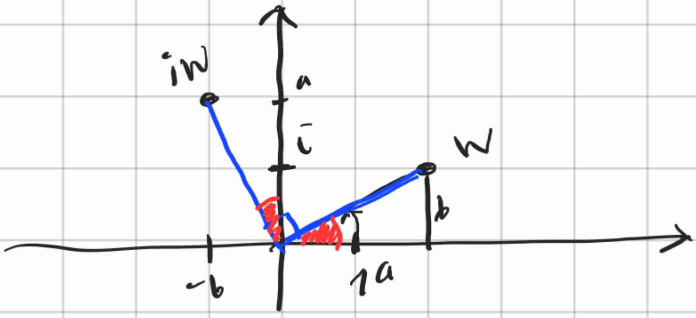
$$\begin{cases} A_w(z+u) = A_w(z) + A_w(u) \\ A_w(t \cdot z) = t \cdot A_w(z) \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$A_w(x+iy) = A_w(x \cdot \underline{1} + y \cdot \underline{i})$$
$$= x\, A_w(1) + y\, A_w(i)$$
$$= x \cdot (w \cdot 1) + y\,(w \cdot i)$$
$$= x \cdot w + y \cdot (iw)$$

$w = a + ib$

$w \cdot i = \underbrace{ai - b}$

$= -b + ia$



$w \mapsto iw$

rotazione di 90° in senso antiorario.

Arg w

Sugli elementi della base $1, i$

A_w è una rotazione di Arg w in senso antiorario composta con una omotetia di ragione $|w|$.

$\Rightarrow$ dalla linearità deduco che A_w è proprio la composizione di rotazione e omotetia.

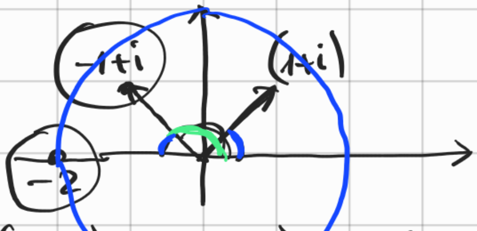
[La rotazione è rappresentata dalla matrice $\dfrac{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}{\sqrt{a^2+b^2}} = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $|w| = a^2 + b^2$

[matrice di rotazione]

$\theta = \text{Arg}\, w$

Sugli appunti si rappresenta la rotazione senza fare riferimento alle applicazioni lineari.

Es.



$45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$

$$(1+i)(-1+i) = (i+1)(i-1) = i^2 - 1^2 = -2$$

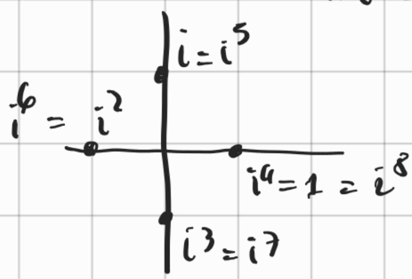
Es

$$i^n = \underbrace{i \cdot i \cdot i \cdots i}_{n \text{ volte}}$$

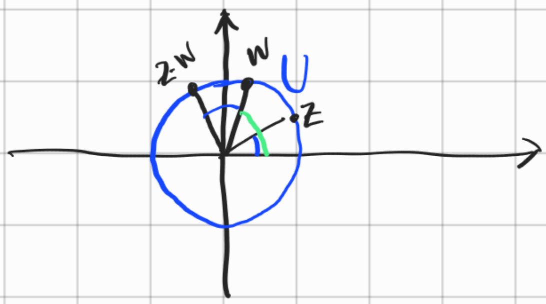
$i^6 = i^2 = -1$ $\quad i^4 = 1$

$i^7 = i^3 = -i$ $\quad i^5 = i$

...



Osservazione Se $|z| = 1, |w| = 1$ $\quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w| = 1.$



$U = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$

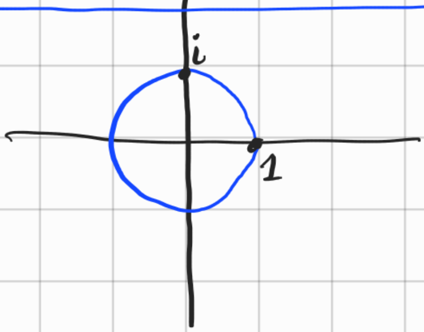
U è un sottogruppo moltiplicativo di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

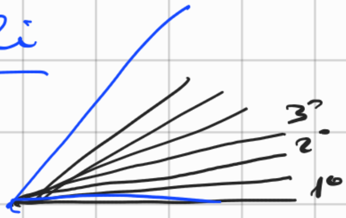
$z \in U$ rappresenta una direzione, avere un angolo

e il prodotto $z \cdot w$ rappresenta la somma degli angoli.

"Posso creare un isomorfismo che manda la somma in un prodotto"

Vogliamo misurare gli angoli





somma geometrica di angoli

in modo che la misura della somma sia uguale alla somma delle misure

somma di numeri reali

⚠ Quanto fa la somma di due angoli piatti?

$180 + 180 = \underline{360} \overset{?}{=} 0$

$(-1) \cdot (-1) \qquad \overset{?}{=} 1$

$270 + 270 = 540 \overset{?}{=} 180$

$(-i) \cdot (-i) \qquad = -1$

---

misure, angoli

Voglio trovare $\varphi : \mathbb{R} \to U$ tale che:

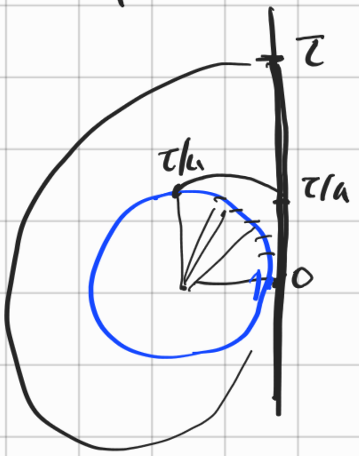
prodotto in $\mathbb{C}$

- $\boxed{\varphi(x+y)} = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

somma degli angoli

- $\varphi(\tau) = 1 = \varphi(0)$ ← angolo giro $\tau > 0$ e $\forall t \quad 0 < t < \tau \quad \varphi(t) \neq 1$.

- $\operatorname{Im} \varphi(t)$ è crescente se $0 \leq t \leq \frac{\tau}{4}$



Teorema $\exists! \, \varphi$ con le proprietà volute. (Fissato τ)

dim (solo vaga idea)

$$\varphi(nx) = \left(\varphi(x)\right)^n$$

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = z \quad \text{t.c. } z^2 = \varphi(x)$$

$$\varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) = z \quad \text{t.c. } z^{2^n} = \varphi(x)$$

Definisco univocamente φ su $\left\{ \frac{p \cdot \tau}{2^{n+2}} : p \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N},\ p < 2^n \right\}$

e poi lo estendo per monotonia su tutto

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : 0 \le x < \frac{\tau}{4} \right\}$$

□