ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 8 – 2.10.2024

Esercizio 15 test settimanale $\frac{(2n)!}{n!} \geq n^n$

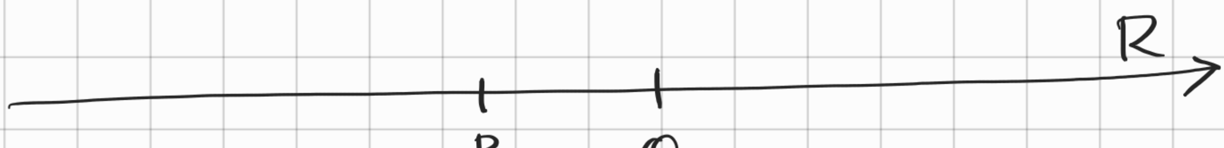
$$\frac{(2n)!}{n!} = \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^{n} k} = \prod_{k=n+1}^{2n} k \geq \prod_{k=n+1}^{2n} n+1 = (n+1)^n \geq n^n$$

$$\frac{(2n)!}{n!} = \frac{\overbrace{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}^{n}\,\cancel{n}\,\cancel{(n-1)}\cdots\cancel{1}}{\cancel{n}\,\cancel{(n-1)}\cdots\cancel{1}}$$

$$\geq (n+1)^n > n^n$$

Esercizio per quali $n \in \mathbb{N}$ $\quad 2^n \geq n^2$.

RETTA REALE



i punti sulla retta sono ORDINATI

def una relazione $\leq$ su un insieme R si dice essere un ordinamento se:

(1) $\quad x \leq x \quad$ riflessiva

(2) $x \le y \wedge y \le x \Rightarrow x = y$ antisimmetrica

(3) $x \le y \wedge y \le z \Rightarrow x \le z$ transitiva

Diremo inoltre che l'ordinamento è TOTALE (o LINEARE)

(4) $x \le y \vee y \le x$.

<u>ES</u> di ordinamento <u>non</u> totale: $\subseteq$

Su $\mathbb{N}$: $n \le m \iff \exists k \in \mathbb{N}: m = n+k$

Su $\mathbb{Z}$: $n-m \le n'-m' \iff n+m' \le m+n'$

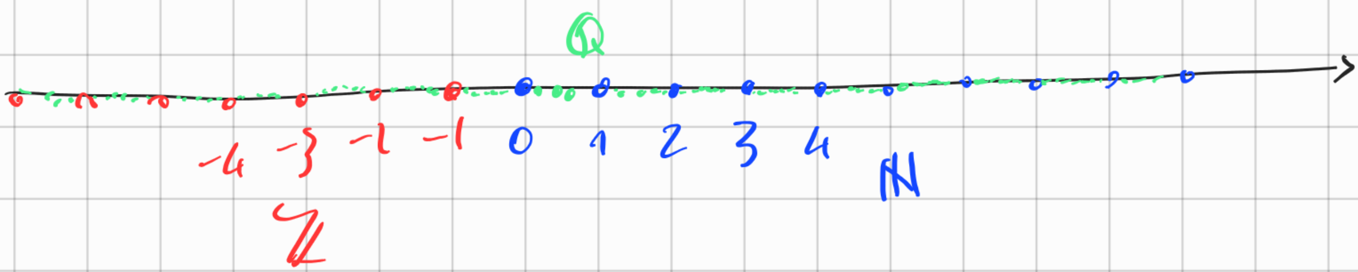
Su $\mathbb{Q}$: $\frac{p}{q} \le \frac{p'}{q'} \iff pq' \le p'q$

con $p, p' \in \mathbb{Z}$, $q, q' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. $\left(\begin{array}{l} x \ge 0 \\ -x \le 0 \end{array}\right)$

Se $m \ge 0$ $\quad x \le y \Rightarrow mx \le my$

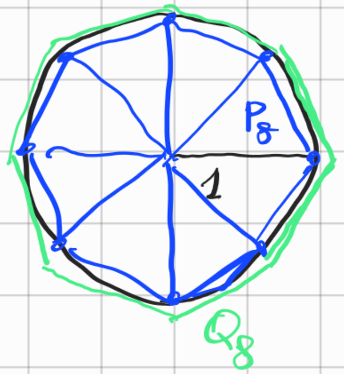
$\forall z \quad x \le y \iff x+z \le y+z$ $\quad$ *

$\le$ su $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ è un ordinamento totale



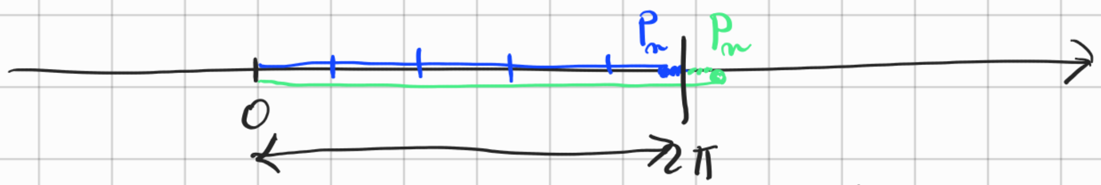
$\mathbb{Q}$ è un campo ordinato: ✗

In $\mathbb{Q}$ "mancano" dei punti. $\sqrt{2}$ (Pitagora lezione scorsa)



P_n = il perimetro dell'n-agono regolare inscritto nella circonferenza di raggio 1.

Q_n = il perimetro dell'n-agono regolare circoscritto alla circonferenza unitaria



L'elemento di separazione tra

$$\{P_n : n\in\mathbb{N}\} \le 2\pi \le \{Q_n : n\in\mathbb{N}\}$$

CONCETTO di MISURA FISICA: posso approssimare una misura con un errore piccolo.

(Assioma di Dedekind). Def. Un ordinamento $\le$ su $\mathbb{R}$ si dice essere CONTINUO (o DEDEKIND COMPLETO) se

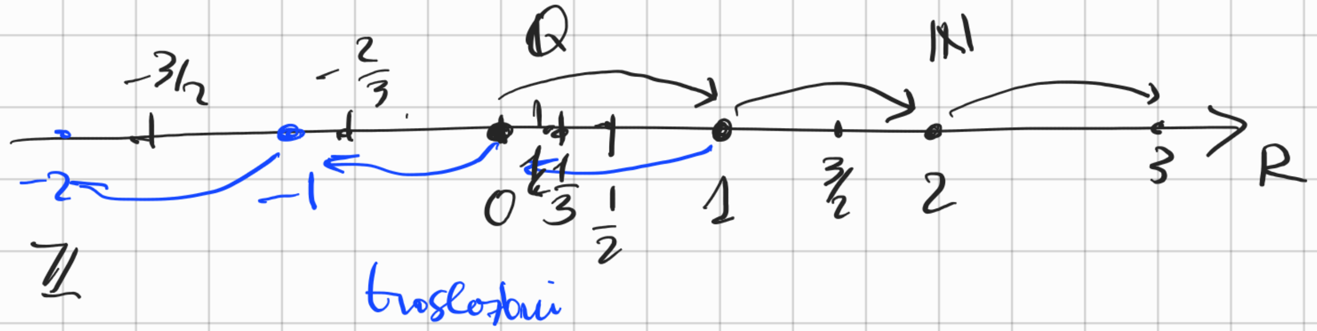
Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

se $A \le B$ (separati) (intendo $\forall a\in A\ \forall b\in B : a \le b$)

allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che:

$$A \le c \le B \quad (\text{intendo } \forall a\in A, \forall b\in B : a \le c \le b)$$

Vogliamo avere (a tutti i costi) un insieme $\mathbb{R}$ che rappresenta la retta reale:



l'ordinamento di $\mathbb{Q}$ non è continuo:

$$A=\{x\in\mathbb{Q}: x^2\le 2\},\quad B=\{x\in\mathbb{Q}: x\ge 0,\ x^2\ge 2\}$$

$A\le B$ ma se fosse $A\le c\le B$
si può dimostrare $c^2=2$.

$c\notin\mathbb{Q}$.

Posso definire $\mathbb{R}$ come "l'insieme di tutti i potenziali elementi di separazione tra sottoinsiemi separati in $\mathbb{Q}$".

$$\sqrt{2}=(A,B)$$

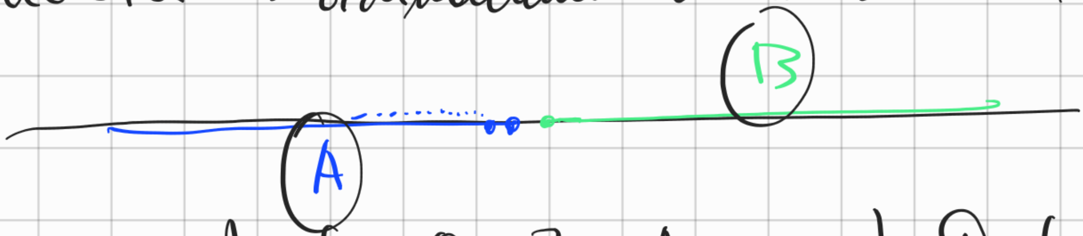
$$B=\mathbb{Q}\setminus A$$

$$\mathbb{R}=\{(A,B):\ \}$$

$A\le B$
$A\cup B=\mathbb{Q}$
$A,B\neq\emptyset$
+ decidiamo dove mettere $q\in\mathbb{Q}$ se $A\le q\le B$.

$\mathbb{R}$ è un campo ordinato (come $\mathbb{Q}$)

inoltre l'ordinamento di $\mathbb{R}$ è continuo:



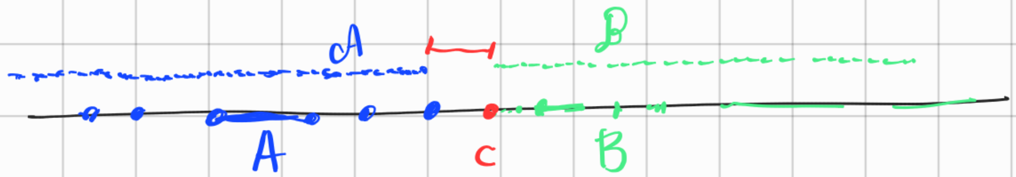
$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{Q} : \exists\, a \in A : x \le a\}$, $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{Q} : \exists\, b \in B\ \ x \ge b\}$

$a = (\alpha, \beta)$ $x \in \alpha$

$b = (\gamma, \delta)$ $x \in \delta$

$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ è separato in $\mathbb{Q}$

$c = (\mathcal{A} \cup (\mathbb{Q} \setminus \mathcal{B}), \mathcal{B}) \in \mathbb{R}$.



Teorema esiste $\mathbb{R}$ con $(0, 1, +, \cdot, \le)$ campo ordinato continuo.

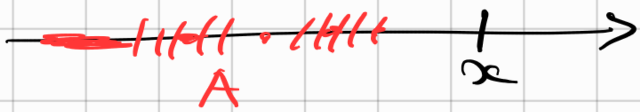
Dentro $\mathbb{R}$ trovo $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$.

Vedremo che $\mathbb{R}$ è unico a meno di isomorfismi

MASSIMO, MINIMO, ESTREMO SUPERIORE/INFERIORE

Siamo su un qualunque insieme ordinato R

Def $x \in R$, $A \subseteq R$ diremo che x è un maggiorante di A se $A \le x$ cioè $\forall a \in A.\ a \le x$



minorante se $x \le A$

x è massimo di A se $A \leq x$ e $x \in A$

($x = \max A$)

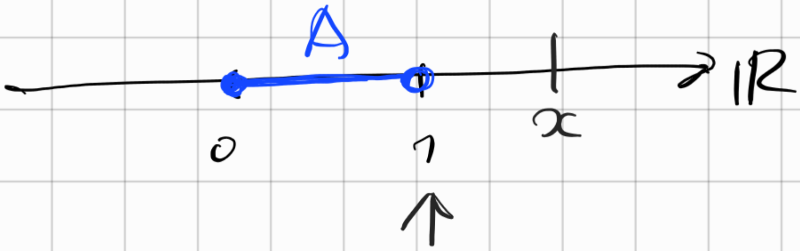
minimo se $x \leq A$ e $x \in A$.
($x = \min A$)

ES $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ $x \leq 1$ e $x \neq 1$.

1 è un maggiorante di A. Anche 7 è un maggiorante.
1 non è massimo di A ($1 \notin A$).
0 è ~~un~~ il minimo di A

Osservazione il minimo/massimo di A se esiste è unico.

se esistono li denotiamo con $\min A$, $\max A$



Def x è estremo superiore di A

se x è il minimo dei maggioranti di A.

scriviamo $x = \sup A$

x è estremo inferiore di A

se x è il massimo dei minoranti di A
$x = \inf A$.

Nota se $x = \min A \Rightarrow x = \inf A$.

ES $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x < 1\}$

$0 = \min A = \inf A$.

$1 = \sup A$.

$\{\text{maggioranti di } A\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq y \ \ \forall y \in A\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$

$\left(\text{se } x < 1 \ \exists\, y : \ x < y < 1 \qquad y = \frac{x+1}{2} \right)$

1 è il minimo dei maggioranti.