ELEMENTI di CALCOLO delle VARIAZIONI
LEZIONE 19 – 12.12.2024
MISURE DI BOREL (CON SEGNO)

μ misura di Borel a valori in $\mathbb{R}$ è una funzione σ-additiva definita sui boreliani

ES 1 $\mathcal{L}$ misura di Lebesgue su (a,b) $\quad \mathcal{L}(A) = |A|$

ES 2 $\quad \delta_{x_0}$ delta di Dirac $\quad \delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A \\ 0 & \text{se } x_0 \notin A \end{cases}$

ES 3 $\quad C$ insieme di Cantor: $\boxed{C = \frac{C}{3} \cup \left(\frac{C}{3} + \frac{2}{3}\right)}$

C ha "dimensione" hausdorff δ

$$\mathcal{H}^\delta(\lambda C) = \lambda^\delta \mathcal{H}^\delta(C)$$

$$\mathcal{H}^\delta(C) = \frac{\mathcal{H}^\delta(C)}{3^\delta} + \frac{\mathcal{H}^\delta(C)}{3^\delta}$$

$1 = \frac{2}{3^\delta} \qquad \delta = \log_3 2$

$$\mu(A) = \mathcal{H}^\delta(C \cap A)$$

ES 4 $\quad \mu_1, \mu_2$ sono misure positive (finite) $\quad \mu = \mu_1 - \mu_2$ è una misura (con segno).

Denotiamo con $\mathcal{M}(a,b)$ l'insieme delle misure di Borel $\mu : \mathcal{B}((a,b)) \to \mathbb{R}$.

$\mathcal{M}(a,b)$ è uno spazio vettoriale.

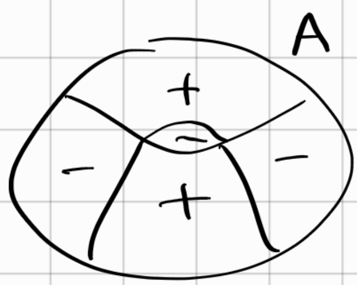
$\mathcal{M}$ diventa uno spazio di Banach se scelgo come norma la:

VARIAZIONE TOTALE

• variazione $|\mu|$ è una misura definita come:

$$|\mu|(A) = \sup\left\{ \sum_k |\mu(A_k)| \text{ con } A_k \text{ disgiunti},\ A_k \subseteq A \right\}$$

$|\mu| \in \mathcal{M}(X)$



la variazione totale di μ

è $\quad \|\mu\|_{\mathcal{M}} = |\mu|(X)$

• $\mathcal{M}(a,b)$ è lo spazio duale di $C_0([a,b])$

ogni $L : C_0([a,b]) \to \mathbb{R}$ lineare continuo

si scrive nella forma $\quad L_\mu(\varphi) = \int_a^b \varphi \, d\mu$

con $\mu \in \mathcal{M}(a,b) = \mathcal{M}((a,b))$

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}} = \sup_{\|\varphi\|_\infty \le 1} L_\mu(\varphi) = \sup\left\{ \int_a \varphi \, d\mu : \varphi \in C_0(a,b),\ |\varphi| \le 1 \right\}$$

Su $\mathcal{M}(a,b)$ c'è quindi una topologia debole-*

$\mu_k \xrightarrow{*} \mu \quad$ se $\quad L_{\mu_k}(\varphi) \to L_\mu(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_0([a,b])$

ovvero $\quad \int_a^b \varphi \, d\mu_k \to \int_a^b \varphi \, d\mu \quad \forall \varphi$

BANACH-ALAOGLU se μ_k è limitata in $\mathcal{M}(a,b)$

allora $\exists\, k_j$ $\exists\, \mu \in \mathcal{M}(a,b)$ t.c. $\mu_{k_j} \xrightarrow{*} \mu$

inoltre $\|\mu\|_{\mathcal{M}} \leq \liminf_k \|\mu_k\|$.

ES $\mu_k = \delta_{\frac{1}{k}}$ $\qquad \mu_k \xrightarrow{*} \delta_0$

$$\int \varphi \, d\mu_k = \varphi\left(\tfrac{1}{k}\right) \to \varphi(0) = \int \varphi \, \delta_0$$

ma $\left\| \delta_{\frac{1}{k}} - \delta_{\frac{1}{k+1}} \right\| = 2$ $\qquad \mu_k = \delta_{\frac{1}{k}}$ non converge forte.

Def $\mu, \nu \in \mathcal{M}$, $\nu \geq 0$, diremo che μ è assolutamente continua rispetto a ν, scriveremo $\mu \ll \nu$

se $\nu(B) = 0 \Rightarrow |\mu|(B) = 0$

diremo che μ è singolare rispetto a ν, scriveremo $\mu \perp \nu$ se esiste $B \in \mathcal{B}(X)$ tale che $\nu(B) = 0$ e $|\mu|(X \setminus B) = 0$

Se $u \in L^1_\nu(X)$ $\qquad u \cdot \nu$ è la misura:

$$u \cdot \nu(B) = \int_B u(x) \, d\nu(x)$$

vale sempre $\quad u \cdot \nu \ll \nu$.

RAPPRESENTAZIONE DI $u \in BV$ tramite integrale di una misura.

<u>Teorema</u> (i) Data $\mu \in \mathcal{M}((a,b))$ posto

$$u(x) = \mu((a,x)) \qquad \left(\int_{(a,x)} 1 \, d\mu.\right)$$

si ha $u \in BV([a,b])$, $u(a) = u(a^+) = 0$ ← limite destro in a.

$$u(x) = u(x^-) \quad \forall x \in (a,b].$$

e $V(u,a,x) = V(u,a,x^-) \leq |\mu|((a,x))$.

(ii) Viceversa se $u \in BV(a,b)$ $\exists!\ \mu \in \mathcal{M}$ t.c.

$$u(x^-) = u(a^+) + \mu((a,x))$$

e inoltre $V(u,a,x^-) = |\mu|((a,x))$

<u>dim</u> (i) <u>Passo 1</u> data $\mu \in \mathcal{M}(a,b)$, supponiamo $\mu \geq 0$.

allora posto $u(x) = \mu((a,x))$ si ha $u(a) = u(a^+) = 0$
$u(x) = u(x^-)$

$\mu \geq 0 \Rightarrow u$ è crescente $\Rightarrow V(u,a,x) = u(x)$

$$V(u,a,b) = u(b) = \mu((a,b)) < +\infty \quad \Rightarrow \quad u \in BV([a,b])$$

<u>Passo 2</u> dat $\mu \in \mathcal{M}(a,b)$ qualunque:

$\mu = \mu^+ - \mu^-$ con $\mu^+, \mu^- \geq 0$ $\qquad$ inoltre $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$

quindi posto:

$$u(x) = \mu((a,x)) = \mu^+((a,x)) - \mu^-((a,x))$$

$$\underset{u^+(x)}{\parallel} \quad , \quad \underset{u^-(x)}{\parallel}$$

sono in BV

sono crescenti

$u \in BV$

$$\left.\begin{matrix} u^\pm(a) = u^\pm(a^+) \\ u^\pm(x) = u^\pm(x^-) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} u(a) = u(a^+) \\ u(x) = u(x^-) \end{cases}$$

Vogliamo mostrare che

$$V(u, a, x) \overset{?}{\leq} |\mu|((a,x)).$$

$$\sum_k |u(x_{k+1}) - u(x_k)| = \sum_k |\mu((a, x_{k+1})) - \mu((a, x_k))|$$

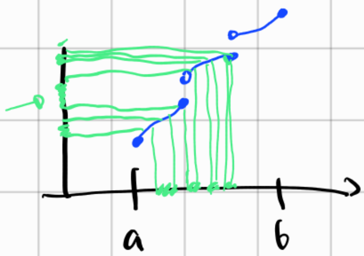
$$= \sum_k |\mu([x_k, x_{k+1}))| \leq \sum_k |\mu|([x_k, x_{k+1}))$$

$$= |\mu|\left(\bigcup_k [x_k, x_{k+1})\right) = |\mu|(a,x) \qquad \boxed{i}$$

(ii) Data $u \in BV([a,b])$.

<u>Passo 1</u> Supponiamo $u(a) = u(a^+) = 0$, $u(x) = u(x^-)$

e inoltre u <u>crescente</u>



Per $A \in \mathcal{B}((a,b))$

definiamo $\mu(A) = \left|\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in A, \, y \in [u(x^-), u(x^+)]\}\right|$

$\mu \geq 0$ misura di Lebesgue.

allora $\mu((a,x)) = u(x^-) - u(a^+) = u(x)$. (u crescente...)

$$V(u, a, x) = V(u, a, x^-) = u(x) = \mu((a,x)) \underset{\mu \geq 0}{=} |\mu|((a,x)).$$

<u>Passo 2</u> Supponiamo solo $u(a) = u(a^+) = 0$, $u(x) = u(x^-)$

$u \in BV(a,b)$

sappiamo che $u = u_1 - u_2$ | u_1, u_2 crescenti, $u_{12}(a) = u_{12}(a^+)$, $u_{12}(x) = u_{12}(x^-)$

inoltre $V(u, a, x) = u_1(x) + u_2(x)$

(ADDENDUM LEZIONE SCORSA)

Per il passo 1 esistono $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ tali che

$$u_{12}(x) = \mu_{12}((a, x))$$

$$u(x) = u_1(x) - u_2(x) = \mu_1((a,x)) - \mu_2((a,x)) = \mu((a,x)).$$

se pongo $\mu = \mu_1 - \mu_2$

$$v(x) = V(u, a, x) = u_1(x) + u_2(x) = \mu_1((a,x)) + \mu_2((a,x)).$$

se pongo $\lambda = \mu_1 + \mu_2$. $\quad = \lambda((a,x))$

Dunque $|\mu(E)| \leq \lambda(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}((a,b))$

$$\Rightarrow |\mu| \leq \lambda.$$

Ma per (i) $\quad |\mu|((a,x)) \geq V(u,a,x) = \lambda((a,x))$

$$\Rightarrow |\mu|([\alpha,\beta)) \geq \lambda([\alpha,\beta)) \quad \forall \alpha, \beta \in (a,b)$$

$$\Rightarrow |\mu| \geq \lambda$$

$$\Rightarrow |\mu| = \lambda \qquad (\mu_1 = \mu^+ \text{ e } \mu_2 = \mu^-)$$

Quindi $u(x) = \mu((a,x))$, $V(u,a,x) = |\mu|((a,x))$

Passo 3 $\quad u \in BV$ qualunque. Allora pongo

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = a \\ u(x^-) - u(a^+) & \text{se } x \in (a,b] \end{cases}$$

così $\tilde{u}$ soddisfa le ipotesi del Passo 2 .....

la misura μ di $\tilde{u}$ va bene anche per u. $\square$

<u>UNICITA'</u> se $u(x) = \mu((a,x]) = \nu((a,x]) \Rightarrow \mu = \nu$.

coincidono sugli intervalli.

<u>Def</u> $BV(a,b) = BV([a,b])/\sim$

dove $u \sim v$ $\left\langle \begin{array}{l} u(x) = v(x) \quad \tilde{\forall} x \in (a,b) \\ \text{ovvero } \begin{cases} u(a^+) = v(a^+) \\ u(x^-) = v(x^-) \quad \forall x \in (a,b]. \end{cases} \end{array} \right.$

$V(u,a,b)$ è ben definito su BV

se ignoro il valore di u nei punti di discontinuità.

$BV(a,b) \subseteq L^\infty(a,b)$ perchè $u \in BV$ è limitata.

<u>OSS</u> $u \in BV \iff \exists \mu \in \mathcal{M}(a,b)$ t.c.

$$u(x^-) = u(a^+) + \mu((a,x])$$

inoltre $V(u, a^+, x^-) = |\mu|((a,x])$

dunque u è continua in $x_0 \iff |\mu|(\{x_0\}) = 0$.

$$|u(x^+) - u(x^-)| = |\mu|(\{x_0\}).$$

Ricordando che $u \in W^{1,1} \iff \exists v \in L^1$ t.c. $u(x) = \int_a^x v$

$AC \cong W^{1,1}(a,b) \subseteq BV(a,b)$ $u \in W^{1,1} \Rightarrow u$ continua.

Inoltre μ rappresenta la derivata "distribuzionale" di $u \in BV$.

$$u(x) = \mu((a,x))$$

$\forall \varphi \in C_c^\infty((a,b))$

$$\int_a^b u \cdot \varphi' = \int_a^b \mu((a,x))\, \varphi'(x)\, dx$$

$$= \int_a^b \int_{(a,x)} d\mu(y)\, \varphi'(x)\, dx$$

$$= \int_a^b \int_y^b \varphi'(x)\, dx\, d\mu(y) = - \int_a^b \varphi(y)\, d\mu(y)$$

$\mu =: Du$ $\quad Du \in \mathcal{M}$ è la derivata distribuzionale di u.
