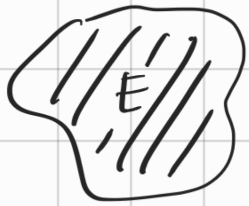
ELEMENTI di CALCOLO delle VARIAZIONI
LEZIONE 18 - 10.12.2024

FUNZIONI BV (Bounded Variation - variazione limitata)

<u>Motivazione</u> Problemi geometrici $E \subseteq \mathbb{R}^n$

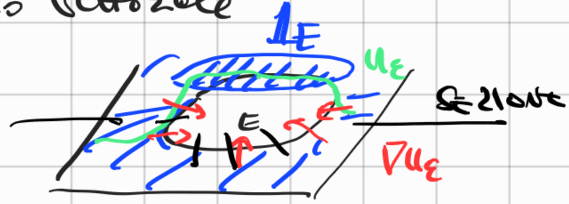


$P(E)$ = misura $(n-1)$-dimensionale di ∂E

Lo spazio degli $E \subseteq \mathbb{R}^n$ non è uno spazio vettoriale

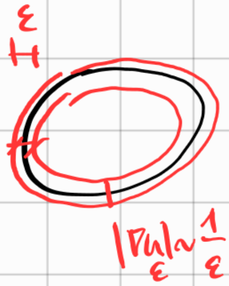
$$E \rightsquigarrow \mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

$\uparrow$
u_E



$$\int_a^b |u'| = \left|\int_a^b u'\right| = |u(b) - u(a)|$$

VARIAZIONE (TOTALE)



$$P(E) \leftarrow \int |\nabla u_\varepsilon| = V(u_\varepsilon) \leftarrow \text{NORMA}$$

$$\int |\nabla u_\varepsilon| = \int \sup_{|v| \le 1} (\nabla u_\varepsilon(x), v)\, dx = \sup_{|\varphi| \le 1} \int (\nabla u_\varepsilon(x), \varphi(x))\, dx = \sup_{|\varphi| \le 1} \int u_\varepsilon \cdot \operatorname{div} \varphi$$

$$P(E) = \int |D\mathbb{1}_E|$$

$\uparrow$ misura

= norma di un operatore lineare

Palla unitaria in C^0 (convergenza uniforme)

Se E regolare

$|D\mathbb{1}_E|$ = misura di superficie su $\partial E = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial E$

$D\mathbb{1}_E$ = misura vettoriale concentrata su ∂E
$= \nu_E(x) \cdot \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial E$

$|\nu_E(x)| = 1$ su $x \in \partial E$

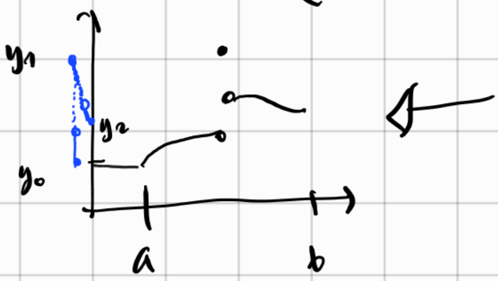
NOI FACCIAMO IL CASO $n=1$

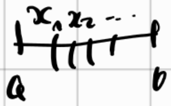
$u : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$V(u,a,b) = \sup\left\{ \sum_{k=0}^{N-1} |u(x_{k+1}) - u(x_k)| \;:\; a \le x_0 < x_1 < \dots < x_N \le b \right\}$$

$$\left(= \ell(u,a,b) \right)$$

$u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$





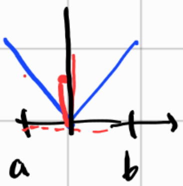
ma se u non è continua

$|y_0 - y_1| + |y_1 + y_2|$ ($\notin BV$, puntuale)

$$BV(a,b) = \{ u : [a,b] \to \mathbb{R} \;:\; V(u,a,b) < +\infty \}$$

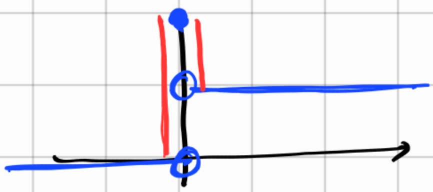
Oss Ricordiamo $u \in AC \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad |x-y| < \delta \Rightarrow V(u,x,y) < \varepsilon$

ES $u(x) = |x|$



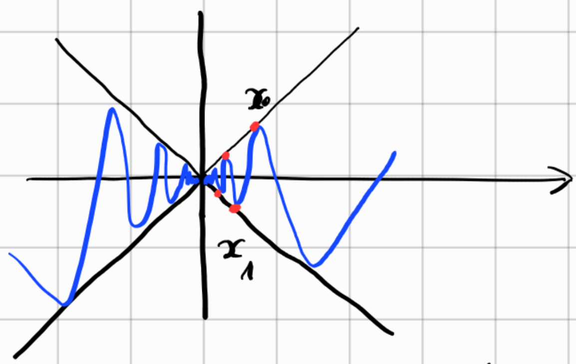
$$V(|x|, a, b) = |b-a|$$

ES
$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



$$V(x,a,b) = 3 \quad \text{se } a \le 0 \text{ e } b \ge 0$$

ES
$$u(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & \text{se } x \ne 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



$x_k \qquad \sin\frac{1}{x_k} = (-1)^k$

$$\sum |u(x_{k+1}) - u(x_k)| \ge \sum |x_{k+1} + x_k| \ge \sum \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} = +\infty$$

$u \in C^0 \setminus BV$

$$\frac{1}{x_k} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi & \text{se } k \text{ pari} \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}$$

<u>Oss</u> Se $u \in C^1$ $\quad \sum |u(x_{k+1}) - u(x_k)| = \sum \underbrace{|u'(\xi_k)| (x_{k+1} - x_k)}_{\downarrow}$

$$\text{lunghezza} \longrightarrow \int |u'(x)|\,dx$$

<u>Oss</u> $0 \leq V(u, a, b) = V(u, a, c) + V(u, c, b)$ se $a \leq c \leq b$

additività

<u>Oss</u>

$$\sum |u(x_{k+1}) - u(x_k)| \geq \left| \sum (u(x_{k+1}) - u(x_k)) \right| \geq |u(b) - u(a)|$$

$$\boxed{|u(b) - u(a)| \leq V(u, a, b)} \quad (*)$$

$u \in BV(a,b) \Rightarrow |u(x) - u(a)| \leq V(u, a, x) \leq V(u, a, b) < +\infty$

$\Rightarrow u$ è limitata.

$$BV(a,b) \subseteq L^\infty(a,b)$$

<u>Teorema</u> Se $u \in BV(a,b)$ allora u è differenza di due funzioni crescenti.

<u>dim</u> Consideriamo $v(x) = V(u, a, x)$ è crescente

se $x_1 < x_2$ $\quad v(x_1) \leq v(x_2)$ $\quad [v(x_2) - v(x_1) = V(u, x_1, x_2)]$

$$\underbrace{v(x_2) - v(x_1)}_{} \overset{(*)}{\geq} |u(x_2) - u(x_1)| \geq \begin{cases} u(x_2) - u(x_1) \\ u(x_1) - u(x_2) \end{cases}$$

$$(v(x_2) - u(x_2)) - (v(x_1) - u(x_1)) = \underbrace{(v(x_2) - v(x_1)) - (u(x_2) - u(x_1))}_{\geq 0}$$

$$(v(x_2) + u(x_2)) - (v(x_1) + u(x_1)) = \underbrace{(v(x_2) - v(x_1)) - (u(x_1) - u(x_2))}_{\geq 0}$$

$v-u$ e $v+u$ sono crescenti

Ma ovviamente $u = \frac{1}{2}(v+u) - \frac{1}{2}(v-u)$ $\square$

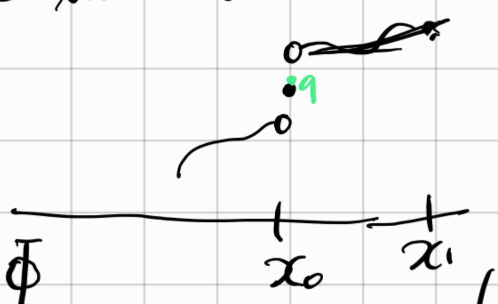
<u>Oss</u> $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente

numerabile.

$$\# \{ x \in [a,b] : u \text{ non è continua in } x \} \leq \# \mathbb{N}$$

<u>infatti</u> $\exists \lim_{x \to x_0^+} u(x) = u(x_0^+)$ $\exists \lim_{x \to x_0^-} u(x) = u(x_0^-)$

x_0 è una discontinuità a salto



$$x_0 \overset{\phi}{\longmapsto} q \in \mathbb{Q} \cap (u(x_0^-), u(x_0^+))$$

ϕ è strettamente crescente

$\phi : \{\text{discontinuità di } u\} \to \mathbb{Q}$ è iniettiva

$$\#\{\text{disc.}\} \leq \# \mathbb{Q} = \# \mathbb{N} \quad \square$$

<u>Corollario</u> $u \in BV$ u ha una quantità numerabile di discontinuità, e le discontinuità sono tutte discontinuità a salto. $\exists u(x_0^+)$ $\exists u(x_0^-)$.

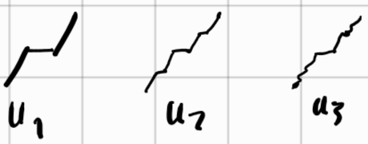
Corollario $u \in BV$

poniamo: $\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x^-) & \text{se } x > a \\ u(a^+) & \text{se } x = a \end{cases}$ $\tilde{u}$ è continua a sinistra.

$\tilde{u}(x) = u(x)$ $\forall x$ $u \mapsto V(\tilde{u}, a, b)$ è stabile per modifiche q.o. di u.

Esempio (Cantor - Vitali)

$u_N \rightrightarrows u$



---> u.

u è crescente, continua $u(0) = 0$, $u(1) = 1$

$V(u, 0, 1) = u(1) - u(0) = 1.$

ma è derivabile quasi ovunque con $u' = 0$

non ha salti (è continua) $\int |u'| = 0$

- u avrà una derivata puntuale u'
- delle δ dirac sui salti $D_s u$ $\leftarrow$ misura
- qualcos'altro .... $D_c u$ $\leftarrow$ parte Cantoriana (misura) della derivata