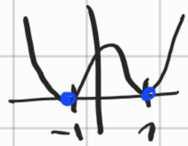
ELEMENTI di CALCOLO delle VARIAZIONI
LEZIONE 6 - 17.10.2024

Lezione scorsa: $\mathcal{L}(u) = \int_0^1 W(u'(x))\,dx \qquad W =$ 

ha infiniti minimi in $C^1_p([0,1])$ e nessun minimo in $C^1([a,b])$. $\quad \min \mathcal{L} = 0, \quad \mathcal{L}(u) = 0 \iff |u'(x)| = 1 \ \forall x$

Se l'ambiente è C^1_p posso ottenere delle condizioni nei punti di non derivabilità? (E-L non ha senso in quei punti)

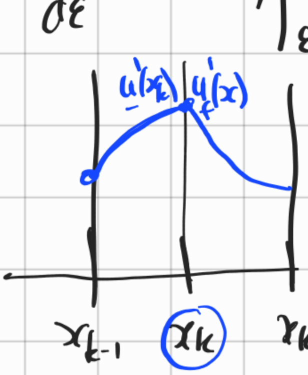
$$u \in C^1_p([a,b]) \qquad \exists\ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$u \in C^1([x_{k-1}, x_k])$$

$$\mathcal{L}(u) = \int_a^b L(x, u(x), u'(x))\,dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} L(x,u,u')\,dx$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}(u+\varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0} = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \underbrace{\cancel{\left[\frac{\partial L}{\partial y}(x,u,u') - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u')\right]}}_{\substack{\text{E-L} \\ =0 \text{ su ogni } [x_{k-1},x_k]}} \varphi(x)\,dx$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u')\cdot\varphi(x)\right]_{x_{k-1}}^{x_k}}_{(*)}$$



$$(*) = \frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u'_+)\varphi\Big|_{x=a} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u'_-) - \frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u'_+)\right)\varphi(x_k)}_{\substack{\| \\ 0 \ \text{ se }}}$$

scelgo φ con $\varphi(x_k) = 0$.

$$-\frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u'_-)\cdot\varphi(x)\Big|_{x=b}$$

OTTENGO LA

Condizione di ERDMANN-WEIERSTRASS:

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial L}{\partial z}\left(x_k, u(x_k), u'_-(x_k)\right) = \frac{\partial L}{\partial z}\left(x_k, u(x_k), u'_+(x_k)\right) \\ \text{per } k = 1 \dots n-1 \quad (\text{nodi interni})\end{gathered}}$$

$$\left(\begin{array}{l} u'_- = \text{derivata sinistra} \\ u'_+ = \text{derivata destra.} \end{array}\right)$$

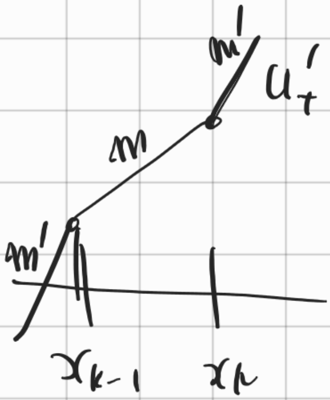
Nota se $\frac{\partial L}{\partial z}$ è iniettiva $(\forall z$ fissati $x, y)$

allora $u'_+(x_k) = u'_-(x_k) \Rightarrow u \in C^1$.

Nell'esempio precedente: $L(x,y,z) = W(z) = (z^2-1)^2$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 4z(z^2-1) = W'(z)$$

$$u'_+\left((u'_+)^2-1\right) = u'_-\left((u'_-)^2-1\right)$$



$u'_+ = 1 \quad u'_- = -1$

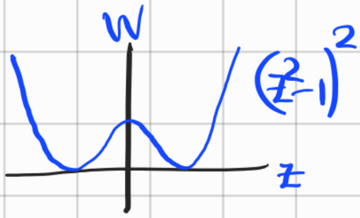
soddisfa E-L e E-W ma non è minimo assoluto

OSS questa condizione è la condizione di Snell che abbiamo visto nell'esempio della rifrazione.

💡 le cose possono andar male se L non è convesso in z.

Esempio finto cattivo

$$\mathcal{L}(u) = \int_0^1 W(u')$$

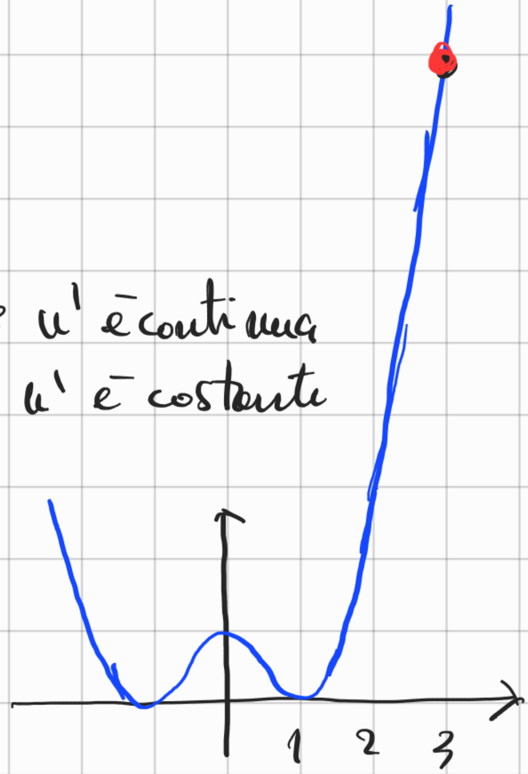
$W =$ 

$$\begin{cases} \mathcal{L}(u) \to \min \\ u(0) = 0, \; u(1) = 3 \end{cases}$$

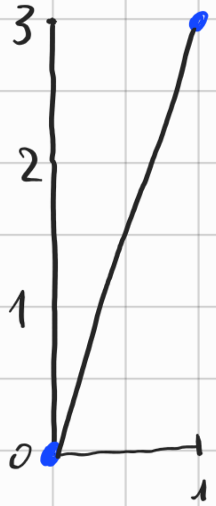
stesso metodo della volta scorsa...

$$W'(u') = \text{costante}$$

dove u' è continua
u' è costante



u è lineare a pezzi



$u_0(x) = 3x$, $u_0'(x) = 3$

$u_0(0) = 0$, $u_0(1) = 3$

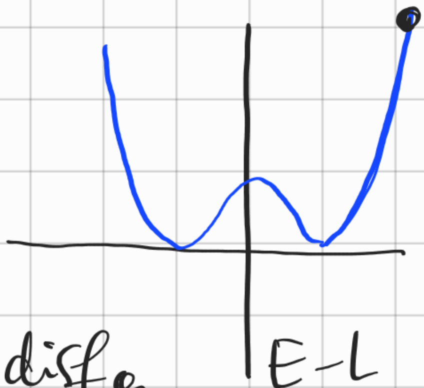
$$\mathcal{L}(u_0) = \int_0^1 W(3)$$

u_0 è minimo assoluto?

In C^1_p

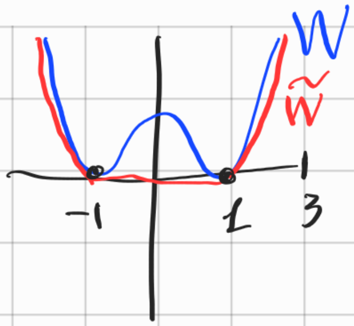
E-W $\Rightarrow$ sono incompatibili.

In C^1



u_0 è l'unica funzione che soddisfa E-L e le condizioni al bordo.

Idea



$$\tilde W(z) = \begin{cases} W(z) & \text{se } |z| \geq 1 \\ 0 & \text{se } |z| \leq 1 \end{cases}$$

convessificato di W.

$$\mathcal{L}(u_0) = \int_0^1 W(u_0') \underset{W(3)=\tilde W(3)}{=} \int_0^1 \tilde W(u_0') \leq \int_0^1 \tilde W(u) \underset{\tilde W \leq W}{\leq} \int_0^1 W(u) = \mathcal{L}(u)$$

$\forall u \in C^1$
$u(0)=0$
$u(1)=3$

$\tilde W$ è convessa
u_0 soddisfa E-L per $\tilde W$
$|u_0'| > 1$

$\Rightarrow u_0$ è minimo per $\mathcal{L}$.

Idea banale: Se u_0 è minimo di $\tilde{\mathcal{L}}$

e $\tilde{\mathcal{L}}(u_0) = \mathcal{L}(u_0)$ e $\tilde{\mathcal{L}} \leq \mathcal{L}$

allora u_0 minimizza $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{L}(u_0) = \tilde{\mathcal{L}}(u_0) \leq \tilde{\mathcal{L}}(u) \leq \mathcal{L}(u)$$

Esempio più cattivo

$$W(z) = (1-z^2)^2$$

$$\mathcal{L}(u) = \int_0^1 \left[W(u'(x)) + \frac{1}{2}(u(x))^2 \right] dx$$

$$\begin{cases} u(0)=0 \\ u(1)=0 \\ \mathcal{L}(u) \to \min \end{cases}$$

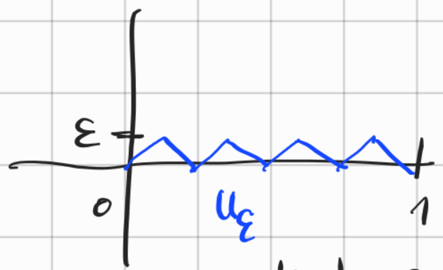
$\Rightarrow \mathcal{L}(u) > 0$

① $\mathcal{L} \geq 0$ $\quad \exists\, u : \mathcal{L}(u) = 0$? NO! $\quad |u'| = 1 \;\lightning\; |u| = 0$

MA ② $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, u \in C^1$ tale che $\mathcal{L}(u) < \varepsilon$.

① + ② $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ non ha minimo.

②



$|u_\varepsilon| \leq \varepsilon$

$$\mathcal{L}(u_\varepsilon) = \int_0^1 \left[0 + \frac{1}{2}|u_\varepsilon|^2 \right] \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \varepsilon^2 = \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

$u_\varepsilon \in C^1_p$ ma grazie ad un lemma di allisciamento

$$\mathcal{L}(\tilde{u}_\varepsilon) = \int_{|\tilde{u}'| \neq 1} W(\tilde{u}') + \frac{1}{2}\int_0^1 |\tilde{u}|^2 \leq W(0) \cdot N \cdot \varepsilon^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2$$

$$\sim W(0) \cdot \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

$$N \sim \frac{2}{\varepsilon}$$

$u_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon$ sono successioni minimizzanti.

Nota $u_k \rightrightarrows 0$ uniformemente

ma $\mathcal{L}(u_k) \to 0$ mentre $\mathcal{L}(0) = \int_0^1 W(0) = 1$

$\mathcal{L}$ non è semicontinuo inferiormente

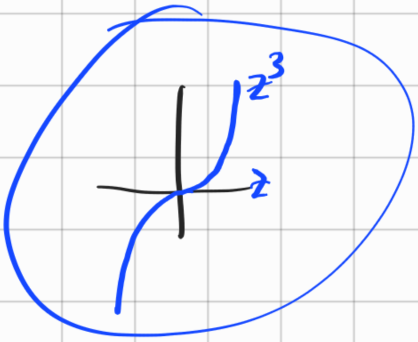
Nota se scelgo la topologia di C^1: $u_k \xrightarrow{C^1} u \iff \begin{cases} u_k \rightrightarrows u \\ u_k' \rightrightarrows u' \end{cases}$

allora $\mathcal{L}$ è continuo!

MA $u_k \not\to 0$ in C^1.

ESEMPIO

$$\mathcal{L}(u) = \int_0^1 \left(u'(x)\right)^3 dx \qquad u(0)=u(1)=0$$



non esistono i minimi