ELEMENTI di CALCOLO delle VARIAZIONI
LEZIONE 5 – 15.10.2024

Lezione scorsa:
$$\begin{cases} \mathcal{L}(u) = \boxed{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega f \cdot u} & (*) \\ u = g \quad \text{su } \partial\Omega & (**) \end{cases}$$

$$E\text{-}L \quad \begin{cases} \boxed{\Delta u = f} & \text{su } \Omega \\ \boxed{u = g} & \text{su } \partial\Omega \quad \left(\begin{array}{c}\text{condizione} \\ \text{di Dirichlet}\end{array}\right) \end{cases}$$

⚠ Se non metto la condizione di bordo $(**)$ e minimizzo $\mathcal{L}(u)$ ottengo E – L
$$\begin{cases} \Delta u = f \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_\Omega} = 0 \quad \left(\begin{array}{c}\text{condizione} \\ \text{di Neumann}\end{array}\right) \end{cases}$$

⋮

$$\int_{\partial\Omega} \underbrace{\nabla u \cdot \nu_\Omega}_{\text{si deve annullare}} \varphi = 0 \quad \forall \varphi$$

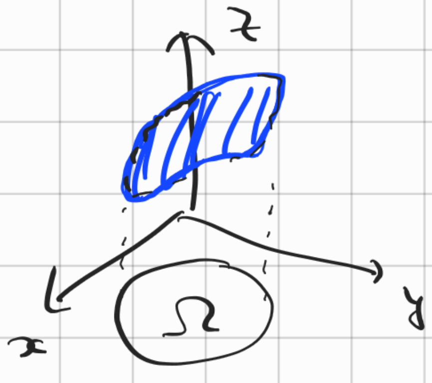
Esempio 2 (in più variabili) SUPERFICI MINIME

(Problema di Plateau: vedi catenoide)

$$\mathcal{L}(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}\, dx \qquad u : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

= area della superficie grafico di u

$$\begin{cases} \mathcal{L}(u) \to \min \\ u(x) = g(x) \text{ su } \partial\Omega \end{cases}$$



$$L(x,y,z) = \sqrt{1+|z|^2} \qquad \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}}, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

E-L $\quad 0 = \operatorname{div} \nabla_z L$

$$\underbrace{\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}}_{} = 0$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{curvatura media}}}{2 \cdot H_u(x)} = \operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = 0$$

I minimi, se esistono e se sono sufficientemente regolari devono avere curvatura media nulla.

superfici minime

CONVESSITÀ

$f'(x_0) = 0$, f convessa
$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x$

è la retta tangente

$L: \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{I}(u) = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \qquad u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

supponiamo: $\forall x \in \Omega$: $(y,z) \mapsto L(x,y,z)$ sia convessa.

$\forall x \in \Omega \quad \forall y, y_0 \in \mathbb{R} \qquad \forall z, z_0 \in \mathbb{R}^n$

$y_0 z_0$

$$L(x,y,z) \geq \underbrace{L(x, y_0, z_0) + \frac{\partial L}{\partial y}(x, y_0, z_0)\cdot(y - y_0) + \nabla_z L(x, y_0, z_0)\cdot(z - z_0)}_{\text{eq. del piano tangente in } y_0, z_0, u(y_0, z_0)} \quad (*)$$

$\Vert \quad y = u(x) \qquad z = \nabla u(x) \qquad y_0 = u_0(x) \qquad z_0 = \nabla u_0(x)$

dove u_0 è il mio candidato minimo

e u è qualunque competitore : $u(x) = u_0(x) \ \forall x \in \partial\Omega$

$$\mathcal{I}(u) \overset{?}{\geq} \mathcal{I}(u_0)$$

$$\mathcal{I}(u) = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \overset{(*)}{\geq}$$

$$\geq \int \left[L(x, u_0, \nabla u_0) + \frac{\partial L}{\partial y}(x, u_0, \nabla u_0)(u - u_0) + \underbrace{\nabla_z L(x, u_0, \nabla u_0)\cdot(\nabla u - \nabla u_0)}_{\text{PER PARTI}} \right] dx$$

$$= \mathcal{I}(u_0) + \int_\Omega \left[\frac{\partial L}{\partial y}(x, u_0, \nabla u_0) - \mathrm{div}_x \nabla_z L(x, u_0, \nabla u_0) \right] \underline{(u - u_0)}\, dx$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \nabla_z L(x, u_0, \nabla u_0)\cdot \nu_\Omega(x) \cdot \cancel{(u - u_0)}\, d\sigma(x)$$

$$= \mathcal{I}(u_0) + \int_\Omega \left[\cancel{E-L} \right]\cdot(u - u_0)\, dx = \mathcal{I}(u_0).$$

ES 1 Integrale di Dirichlet: $L(x,y,z) = \frac{1}{2}|z|^2$

soddisfa l'ipotesi di convessità!

ES 2 Anche (superfici minime) $L(x,y,z) = \sqrt{1 + |z|^2}$

$$\nabla_z L = \frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}} \qquad D_z^2 L = \frac{Id \cdot \sqrt{1+|z|^2} - z \otimes \frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}}}{1+|z|^2}$$

$\uparrow$ matrice Hessiana

$$= \frac{Id\,(1+|z|^2) - z \otimes z}{(1+|z|^2)\sqrt{1+|z|^2}} \overset{?}{>} 0$$

Metodo classico (del calcolo delle variazioni)

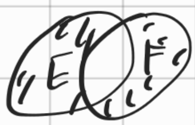
① risolvo E-L

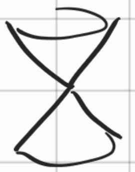
② dimostro che la soluzione è un minimo (per esempio con la convessità)

Metodo diretto (del calcolo delle variazioni)

- Voglio risolvere una eq. (Es $\Delta u = f$)
- Trovo una formulazione variazionale (l'equazione data è una eq. di E-L per un opportuno $\mathcal{L}$)
- Dimostro che $\mathcal{L}$ ha minimo con Weierstraß
  (1) prendo una succ. minimizzante u_k
  (coercività: sottolivelli sono compatti) $\Rightarrow$ ho una estratta convergente $u_{k_j} \to u$
  (2) se c'è semicontinuità inferiore: $\mathcal{L}(u) \leq \liminf \mathcal{L}(u_k)$ se $u_k \to u$

allora $\exists$ a minimo di $\mathcal{L}$.





$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2$$

Es <u>Brachistocrona</u> $L(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{x}}$ è convesso in (y,z)

[mentre $\dfrac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{y}}$ ← non è convesso in (y,z)]

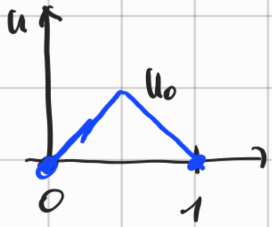
Es <u>Catenoide</u> $L(x,y,z) = x\sqrt{1+z^2}$ è convesso in (y,z).

<u>Esempi in cui le cose possono andare male</u>

① Doppio pozzo

$$\mathcal{L}(u) = \int_0^1 W(u'(x))\,dx \qquad L(x,y,z) = W(z) = (1-z^2)^2$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(u) \to \min \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$



$$u_0 = \begin{cases} x & \text{se } x \le \frac{1}{2} \\ 1-x & \text{se } x \ge \frac{1}{2} \end{cases} \qquad u_0' = \begin{cases} 1 & \text{se } x \le \frac{1}{2} \\ -1 & \text{se } x \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

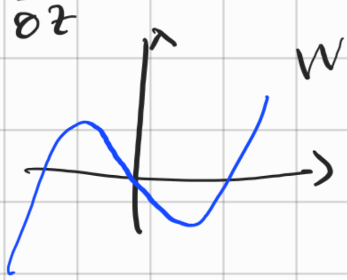
$$u_0 \in C^1_p([0,1]) \qquad \mathcal{L}(u_0) = 0, \qquad \mathcal{L} \ge 0$$

$\Rightarrow u_0$ è un minimo assoluto di $\mathcal{L}$ su C^1_p.

In C^1 non c'è soluzione.

$\not\exists$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = W' = -4z(1-z^2)$$



E.L.: $\quad 0 = \frac{d}{dx} W'(u'(x))$

$$W'(u'(x)) = \text{costante}$$

se $u \in C^1$ $\quad u'$ non salta

$\Rightarrow W'(u')$ costante $\Rightarrow u'$ costante.

$u(x) = mx + q \qquad u(0) = 0 \Rightarrow q = 0$

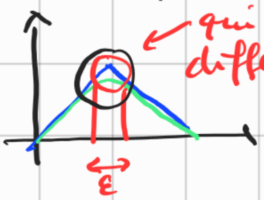
$u(x) = mx \qquad u(1) = 0 \Rightarrow m = 0$

$u(x) = 0.$

$$\mathcal{L}(0) = \int_0^1 W(0) = 1 > 0$$

ho infiniti minimi, tutti in $C^1_p \setminus C^1$

Nota ci sono successioni minimizzanti in $\cdot$ $u_k \in C^1$ tali che $\mathcal{L}(u_k) \to 0$.



Ovvero: posso approssimare $u \in C^1_p$ con u_k in C^1 in modo che $\mathcal{L}(u_k) \to \mathcal{L}(u)$.

Lemma di "allisciamento"

$\forall u \in C^1_p([a,b])$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists u_\varepsilon \in C^1([a,b])$ tale che

$\|u_\varepsilon - u\|_\infty \le \varepsilon, \quad \|u'_\varepsilon\|_\infty \le 2(\|u'\|_\infty + 1)$

$|\{x \in [a,b] : u_\varepsilon(x) \ne u(x)\}| \le \varepsilon \quad \square$

$$\mathcal{L}(u) = \int \left(|u'|^2 + |u-x|^2 \right) \qquad L(x,y,z) = z^2 + |y-x|^2$$

$\forall x$ è convesso in (y,z).

u_0 che risolve E-L $\Downarrow$

senza condizioni al bordo posso dire che è minimo ?