Analisi Matematica A e B
Soluzioni prova scritta n. 2

Laurea in Fisica, a.a. 2023/24
Università di Pisa

14 giugno 2024

1. Si consideri la successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sin a_n, \\ a_0 = 2024. \end{cases}$$

   (a) Determinare, se esiste, il limite della successione a_n.

   (b) Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum a_n x^n$.

   (c) Dire se la serie $\sum a_n$ è convergente.

Soluzione. Si osservi che $a_1 = \sin 2024$ è compreso tra -1 e 1 e l'intervallo $[-1, 1]$ è invariante in quanto $\sin x$ è una funzione crescente, dispari, e $\sin 1 < 1$. Dunque $a_n \in [-1, 1]$ per ogni $n \geq 1$. Inoltre anche $[0, 1]$ e $[-1, 0]$ sono invarianti e quindi sappiamo che se $a_1 \geq 0$ allora $a_n \in [0, 1]$ per ogni $n \geq 1$, mentre se $a_1 \leq 0$ allora $a_n \in [-1, 0]$ per ogni $n \geq 1$.

Sull'intervallo $[0, 1]$ si ha $\sin x \leq x$ e quindi, se $a_1 \geq 0$, la successione a_n è decrescente. Dunque ha limite. Il limite sta in $[0, 1]$ e deve essere un punto fisso di $\sin x$. L'unico punto fisso di $\sin x$ è 0 e dunque $a_n \to 0$. Se invece $a_1 \leq 0$ la successione sta in $[-1, 0]$ per ogni $n \geq 1$ dove si ha $\sin x \geq x$ e quindi la successione è crescente. Analogamente a prima si trova che $a_n \to 0$ anche in questo caso.

Per trovare il raggio di convergenza della serie di potenze possiamo utilizzare il criterio del rapporto. Si ha, per $n \to +\infty$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|\sin a_n|}{|a_n|} = \frac{\sin|a_n|}{|a_n|} \to 1$$

in quanto $|a_n| \to 0$ per $n \to +\infty$ e $\frac{\sin x}{x} \to 1$ per $x \to 0$. Dunque il raggio di convergenza è 1 (il reciproco del limite del rapporto).

Ci proponiamo ora di dimostrare che risulta $|a_n| \geq \frac{|a_1|}{n}$. Visto che $\sum \frac{1}{n}$ è divergente, questo implica che anche $\sum |a_n|$ è divergente. Visto poi che, tolto il primo termine, i termini della serie hanno segno costante, si avrà che anche la serie $\sum a_n$ è divergente.

Nel seguito ci serviarnno i seguenti fatti, che possono essere dimostrati facilmente tramite un veloce studio di funzione:

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}, \qquad \forall x \geq 0; \tag{1}$$

$$\sin x \text{ è crescente per } |x| \leq \frac{\pi}{2}; \tag{2}$$

$$x - \frac{x^3}{6} \geq \frac{nx}{n+1} \text{ se } x^2 \leq \frac{3}{n} \text{ e } n \geq 1. \tag{3}$$

Procediamo dunque a dimostrare, per induzione, che $|a_n| \geq \frac{|a_1|}{n}$. Per $n = 1$ la disuguaglianza è ovviamente valida. Supponiamo allora che per un certo $n \geq 1$ la disuguaglianza sia valida. Si ha allora, usando l'ipotesi induttiva e i fatti enunciati sopra:

$$|a_{n+1}| = \sin|a_n| \geq \sin\frac{|a_1|}{n} \geq \frac{|a_1|}{n} - \frac{\left(\frac{|a_1|}{n}\right)^3}{6} \geq \frac{n}{n+1} \cdot \frac{|a_1|}{n} = \frac{|a_1|}{n+1}.$$

Questo conclude la dimostrazione.

Per quanto riguarda quest'ultimo punto possiamo cercare di spiegare l'idea che sta dietro alla dimostrazione, perché altrimenti la dimostrazione stessa rimane piuttosto misteriosa. L'idea è che fallendo il criterio del rapporto possiamo dire che la successione non ha un carattere assimilabile a quello di una successione geometrica, ma, probabilmente, la convergenza o la divergenza risulta molto più lenta, magari come quella di una successione armonica generalizzata. Possiamo cioè cercare di confrontare la successione a_n con una successione del tipo $b_n = \frac{1}{n^p}$. Ora vorremmo interpretare la relazione di ricorrenza $a_{n+1} = \sin(a_n)$ come faremmo con una equazione differenziale, e per questo la scriviamo tramite differenze finite:

$$a_{n+1} - a_n = \sin a_n - a_n \sim -\frac{a_n^3}{6} \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Abbiamo quindi una successione che tende a zero e la cui variazione tende a zero come una potenza della successione stessa. Per confronto possiamo fare la stessa operazione con la successione $b_n = n^{-p}$ per ottenere (tralasciando qualche passaggio):

$$b_{n+1} - b_n \sim -p\, b_n^{\frac{p}{p+1}}, \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Lo stesso risultato si può intuire, anche più velocemente, usando le derivate al posto delle differenze:

$$\left(\frac{1}{x^p}\right)' = -p\left(\frac{1}{x^p}\right)^{\frac{p+1}{p}}.$$

Per avere la potenza 3 come per la successione a_n dovremmo prendere $p = \frac{1}{2}$. Questo ci fa pensare che la successione a_n debba tendere a zero come una potenza $n^{-\frac{1}{2}}$ e quindi la serie $\sum a_n$ debba divergere come la serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^p}$ con $p \leq 1$. Ma visto che $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ sarà forse ancora più facile dimostrare che $a_n \geq \frac{c}{n}$ per una qualche costante $c > 0$ il che è comunque sufficiente a garantire la divergenza della serie.

$\square$

2. Calcolare l'area della regione

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq y \leq \operatorname{arctg} x,\ x \leq \cos y\right\}.$$

Soluzione. La regione E è compresa tra le due curve $x = \cos y$ e $x = \operatorname{tg} y$ con y che varia tra 0 e l'ordinata del punto di intersezione tra queste due curve. Siano (a, b) le coordinate di tale punto di intersezione. Troviamo b risolvendo $\cos b = \operatorname{tg} b$ ovvero, $\cos^2 b = \sin b$. Ponendo $s = \sin b$ si ottiene $1 - s^2 = s$ ovvero $s^2 + s - 1 = 0$. L'unica soluzione positiva di questa equazione è $s = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Dunque $\sin b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Si ha allora

$$\begin{aligned}|E| &= \int_0^b \cos y\, dy - \int_0^b \operatorname{tg} y\, dy = [\sin + \ln \cos y]_{y=0}^{y=b} \\ &= \sin b + \ln \cos b = s + \frac{1}{2} \ln \cos^2 b \\ &= s + \frac{1}{2} \ln(1 - s^2) = s + \frac{1}{2} \ln s \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{5}-1}{2}.\end{aligned}$$

Abbiamo utilizzato il fatto che l'area di una regione compresa tra i grafici di due funzioni, corrisponde alla differenza degli integrali delle due funzioni. Questa proprietà è valida se consideriamo i grafici rispetto a qualunque sistema di riferimento ortonormale e questo ci ha permesso di usare y come variabile indipendente e x come variabile dipendente. Ovviamente si sarebbe arrivati allo stesso risultato lavorando, come usualmente si fa, considerando x la variabile indipendente. In tal caso l'area si può esprimere in questa forma:

$$|E| = \int_0^a \operatorname{arctg} x\, dx - \int_a^1 \arccos x\, dx$$

e, svolgendo i calcoli, si ottiene lo stesso risultato. $\square$

3. Si consideri la soluzione $u = u(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \dfrac{1}{2u - 3u^2}, \\ u(0) = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

definita sull'intervallo massimale di esistenza.

(a) Dimostrare che u è strettamente crescente;

(b) scrivere la funzione inversa $x = x(u)$;

(c) determinare l'intervallo massimale su cui u è definita.

Soluzione. L'equazione non ha senso se $u = 0$ oppure se $u = \frac{2}{3}$. Visto che $u(0) = \frac{1}{2}$ dovrà quindi essere $0 < u(x) < \frac{2}{3}$ per ogni $x \in I$, dove I è l'intervallo massimale di esistenza. Ma se $u \in (0, \frac{2}{3})$ si ha $2u - 3u^2 = u(2 - 3u) > 0$ e quindi $u' > 0$. Questo dimostra che u è strettamente crescente. Possiamo risolvere l'equazione per separazione delle variabili:

$$(2u - 3u^2)u' = 1$$

integrando:

$$u^2 - u^3 = x + c.$$

Imponendo la condizione iniziale si trova

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = c$$

ovvero $c = \frac{1}{8}$. Dunque

$$x = x(u) = u^2 - u^3 - \frac{1}{8}.$$

Agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza si deve avere $u \to 0$ (all'estremo inferiore) e $u \to \frac{2}{3}$ (all'estremo superiore) perché altrimenti la soluzione potrebbe essere estesa ulteriormente. Ma se $u \to 0$ si ha

$$x = u^2 - u^3 - \frac{1}{8} \to -\frac{1}{8}$$

e se $u \to \frac{2}{3}$ si ha

$$x = u^2 - u^3 - \frac{1}{8} \to \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{1}{8} = \frac{4}{27} - \frac{1}{8} = \frac{5}{216}$$

Deduciamo quindi che

$$I = \left(-\frac{1}{8}, \frac{5}{216}\right).$$

□