

Analisi Matematica A e B

Prova scritta n. 1

Laurea in Fisica, a.a. 2023/24
Università di Pisa

21 maggio 2024

1. Per ogni k intero positivo si consideri la funzione

$$f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \frac{1-x}{1+kx^2}.$$

- (a) Determinare gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie $\sum (-1)^k f_k(x)$ converge.
- (b) Fissato k , calcolare i punti e i valori di massimo e minimo della funzione f_k .
- (c) Dire se la serie di funzioni $\sum (-1)^k f_k$ converge uniformemente su \mathbb{R} . E su $[1, +\infty)$?
2. Sia $f: (0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ una funzione di classe C^1 tale che $\int_0^1 \sqrt{x} f'(x) dx$ converga. Mostrare che:
- (a) $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx < +\infty$;
- (b) esiste $C > 0$ tale che $\sqrt{x} f(x) \leq C\sqrt{x}$ per ogni $x \in (0, 1]$.
3. (a) Dimostrare che la funzione $f(y) = \sqrt{|y|+1}$ è lipschitziana.
- (b) Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$ trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \sqrt{|u|+1}, \\ u(x_0) = 0. \end{cases}$$