

# Analisi Matematica A e B

## Soluzioni prova scritta n. 1

Laurea in Fisica, a.a. 2023/24  
Università di Pisa

21 maggio 2024

1. Per ogni  $k$  intero positivo si consideri la funzione

$$f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \frac{1-x}{1+kx^2}.$$

- Determinare gli  $x \in \mathbb{R}$  per i quali la serie  $\sum (-1)^k f_k(x)$  converge.
- Fissato  $k$ , calcolare i punti e i valori di massimo e minimo della funzione  $f_k$ .
- Dire se la serie di funzioni  $\sum (-1)^k f_k$  converge uniformemente su  $\mathbb{R}$ . E su  $[1, +\infty)$ ?

*Soluzione.* Osserviamo che se  $x \neq 0$  si ha  $f_k(x) \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$  mentre per  $x = 0$  si ha  $f_k(0) = 1$ . Condizione necessaria per la convergenza della serie  $\sum (-1)^k f_k(x)$  è che la successione  $(-1)^k f_k(x)$  sia infinitesima, ossia che  $f_k(x) \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$ . Dunque la serie non converge per  $x = 0$ . Fissato  $x \neq 0$  osserviamo che la successione  $f_k(x)$  è positiva e decrescente se  $x < 1$  mentre è negativa e crescente se  $x > 1$ . In ogni caso si può applicare il teorema di Leibniz per dedurre che la serie  $\sum (-1)^k f_k(x)$  converge.

Studiamo la funzione  $f_k(x)$ . Il segno, come già osservato, è positivo per  $x < 1$  e negativo per  $x > 1$ . Per  $x \rightarrow \pm\infty$  si ha chiaramente  $f_k(x) \rightarrow 0$ , dunque l'asse delle  $x$  è un asintoto orizzontale per il grafico di  $y = f_k(x)$ . La derivata è

$$f'_k(x) = \frac{-(1+kx^2) - (1-x) \cdot 2kx}{(1+kx^2)^2} = \frac{kx^2 - 2kx - 1}{(1+kx^2)^2}.$$

Usando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado (o facendo il completamento del quadrato) si trova che  $f'_k(x) > 0$  se e solo se  $x > 1 + \sqrt{1+1/k}$  oppure  $x < 1 - \sqrt{1+1/k}$ . Dai criteri di monotonia, e dal fatto che all'infinito la funzione tende a zero, si deduce facilmente che  $1 + \sqrt{1+1/k}$  è l'unico punto di minimo assoluto per la funzione mentre

$1 - \sqrt{1 + 1/k}$  è l'unico punto di massimo assoluto. In tali punti la funzione assume dunque il valore minimo e il valore massimo:

$$f_k(1 - \sqrt{1 + 1/k}) = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{k}}}{1 + k \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{k}}\right)^2}$$

$$f_k(1 + \sqrt{1 + 1/k}) = \frac{-\sqrt{1 + \frac{1}{k}}}{1 + k \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{k}}\right)^2}.$$

Visto che la serie non converge per  $x = 0$  non ci può essere convergenza uniforme su tutto  $\mathbb{R}$ . Dimostriamo invece che sull'intervallo  $[1, +\infty)$  invece c'è convergenza uniforme (anche se, si potrebbe osservare che non c'è convergenza totale). Su tale intervallo si ha  $f_k(x) < 0$ . Per avere convergenza uniforme dobbiamo mostrare che

$$\sup_{x \geq 1} \left| \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k f_k(x) - \sum_{k=0}^N (-1)^k f_k(x) \right| \rightarrow 0 \quad \text{per } N \rightarrow +\infty.$$

Ma, guardando la dimostrazione del teorema di Leibniz, sappiamo che

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k f_k(x) - \sum_{k=0}^N (-1)^k f_k(x) \right| \leq |f_{N+1}(x)|$$

e, per quanto visto prima, sappiamo anche che il valore massimo di  $|f_k(x)|$  per  $x \geq 1$  si ha quando  $x = 1 + \sqrt{1 + 1/k}$  e vale:

$$\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{k}}}{1 + k \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{k}}\right)^2} \rightarrow 0, \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

possiamo quindi concludere che la serie converge uniformemente su  $[1, +\infty)$ .  $\square$

2. Sia  $f: (0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$  una funzione di classe  $C^1$  tale che  $\int_0^1 \sqrt{x} f'(x) dx$  converga. Mostrare che:

(a)  $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx < +\infty$ ;

(b) esiste  $C > 0$  tale che  $\sqrt{x} f(x) \leq C\sqrt{x}$  per ogni  $x \in (0, 1]$ .

*Soluzione.* Osserviamo che si tratta di un integrale improprio in 0. Grazie alla formula di integrazione per parti sappiamo che,

$$\int_{\alpha}^1 \sqrt{x} f'(x) dx = [\sqrt{x} f(x)]_{\alpha}^1 - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = f(1) - \sqrt{\alpha} f(\alpha) - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx.$$

Vogliamo ora passare al limite per  $\alpha \rightarrow 0^+$ . Il limite del lato sinistro esiste per ipotesi. Per quanto riguarda il lato destro osserviamo che essendo  $f$  non negativa anche l'integrale improprio  $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$  esiste (anche se potrebbe essere infinito). Per differenza si ottiene dunque che il limite  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sqrt{\alpha} f(\alpha)$  esiste ed è non negativo essendo  $f$  non negativa. Abbiamo quindi:

$$\int_0^1 \sqrt{x} f'(x) dx = f(1) - \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sqrt{\alpha} f(\alpha) - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$$

ma il lato sinistro è finito, per ipotesi, e quindi nessuno dei due termini a destra può essere infinito, perché avendo lo stesso segno se anche solo uno dei due termini fosse infinito anche la loro somma sarebbe infinita. Dunque sono entrambi convergenti:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sqrt{\alpha} f(\alpha) \quad \text{e} \quad \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$$

e in particolare abbiamo dimostrato la richiesta (a). Ma se una funzione è continua su  $(0, 1]$  e il limite per  $x \rightarrow 0^+$  esiste ed è finito allora la funzione si può estendere con continuità al punto  $x = 0$  e la funzione risultante dovrà essere limitata grazie al teorema di Weierstrass. Questa osservazione si applica alla funzione  $\sqrt{x} f(x)$  che, essendo positiva e limitata dovrà dunque soddisfare la condizione del punto (b).

Non era richiesto, ma si può osservare che il limite di  $\sqrt{x} f(x)$  deve in effetti essere uguale a zero, perché altrimenti avremmo  $f(x) \sim \frac{C}{\sqrt{x}}$  per  $x \rightarrow 0^+$  e l'integrale non potrebbe convergere essendo la funzione integranda asintotica a  $\frac{C}{x}$ .

□

3. (a) Dimostrare che la funzione  $f(y) = \sqrt{|y| + 1}$  è lipschitziana.  
 (b) Fissato  $x_0 \in \mathbb{R}$  trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \sqrt{|u| + 1}, \\ u(x_0) = 0. \end{cases}$$

*Soluzione.* Si ha

$$\left| \sqrt{|y| + 1} - \sqrt{|w| + 1} \right| = \left| \frac{|y| + 1 - |w| - 1}{\sqrt{|y| + 1} + \sqrt{|w| + 1}} \right| \leq \frac{|y - w|}{2}.$$

E dunque la funzione  $f$  è  $\frac{1}{2}$ -lipschitziana.

In alternativa si può osservare che la funzione è derivabile sugli intervalli  $(0, +\infty)$  e  $(-\infty, 0)$  e che su entrambi gli intervalli la derivata è limitata.

Dunque la funzione, che nel punto  $x = 0$  è continua, risulta essere lipschitziana separatamente sugli intervalli  $[0, +\infty)$  e  $(-\infty, 0]$  grazie al teorema di Lagrange, e alla limitatezza della derivata. Ma, visto che i due intervalli hanno intersezione non vuota, la funzione è lipschitziana sulla loro unione, ossia su tutto  $\mathbb{R}$ .

Grazie all'osservazione precedente sappiamo a priori che l'equazione differenziale soddisfa il teorema di esistenza e unicità globale. Questa constatazione è rassicurante ma non realmente necessaria per svolgere il punto seguente.

Per quanto riguarda l'equazione differenziale, osserviamo che il lato destro dell'equazione è sempre non inferiore a 1. Dunque ogni soluzione  $u$  risulta essere strettamente crescente sugli intervalli in cui è definita. Se  $u(x_0) = 0$  si avrà dunque che  $u(x) > 0$  per  $x > x_0$  e  $u(x) < 0$  per  $x < x_0$ . Consideriamo allora separatamente l'intervallo  $x \geq x_0$  dove si avrà  $|u(x)| = u(x)$  dall'intervallo  $x \leq x_0$  dove si avrà  $|u(x)| = -u(x)$ .

Per  $x \geq x_0$  si ha, separando le variabili e integrando ambo i membri:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u+1}} = x + c$$

ovvero

$$2\sqrt{u+1} = x + c.$$

Imponendo la condizione iniziale  $u(x_0) = 0$  si trova  $c = 2 - x_0$  e dunque

$$2\sqrt{u+1} = x - x_0 + 2.$$

Ricordando che in questo intervallo  $u > 0$  e quindi  $u + 1 > 0$ , si ottiene

$$u(x) = \frac{(x - x_0 + 2)^2}{4} - 1.$$

Per  $x \leq x_0$  si procede in maniera analoga ponendo  $|u| = -u$ :

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u}} = x + c$$

da cui

$$-2\sqrt{1-u} = x + c$$

e, imponendo la condizione iniziale, si trova  $c = -2 - x_0$  e dunque, osservando che  $1 - u > 0$ , si ottiene

$$u(x) = 1 - \frac{(x_0 + 2 - x)^2}{4}.$$

In conclusione la soluzione del problema di Cauchy è:

$$u(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_0+2)^2}{4} - 1 & \text{per } x \geq x_0 \\ 1 - \frac{(x_0+2-x)^2}{4} & \text{per } x \leq x_0. \end{cases}$$

□