Analisi Matematica A e B
Prova scritta parziale n. 2

Laurea in Fisica, a.a. 2023/24
Università di Pisa

24 febbraio 2023

1. (a) Determinare il numero di soluzioni (reali positive) dell'equazione
$$(1 + \ln x)^2 = x.$$
   (b) Siano a e b rispettivamente la più piccola e la più grande delle soluzioni dell'equazione precedente. Determinare chi è più grande tra $\frac{1}{a}$ e b.

Soluzione. L'equazione ha senso solo per $x > 0$. Osserviamo immediatamente che $x = 1$ è soluzione. Definiamo
$$f(x) = x - (1 + \ln x)^2.$$
Le soluzioni dell'equazione data corrispondono agli zeri della funzione f. Per $x \to 0^+$ si ha $f(x) \to -\infty$, per $x \to +\infty$ si ha $f(x) \to +\infty$. Calcoliamo la derivata:
$$f'(x) = 1 - 2(1 + \ln x)\frac{1}{x} = \frac{x - 2 - 2\ln x}{x}.$$
Per determinare il segno della derivata consideriamo la funzione ausiliaria
$$g(x) = x - 2 - 2\ln x$$
che ha lo stesso segno della derivata (visto che $x > 0$). La derivata di g è
$$g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x - 2}{x}$$
che si annulla in $x = 2$. Si ha $g(2) = 2 - 2 - 2\ln 2 = -2\ln 2 < 0$, $g(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$ e $g(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Osserviamo anche che $g(1) = -1$. Per il teorema degli zeri la funzione g si annulla in due punti x_1 e x_2 con $0 < x_1 < 1 < 2 < x_2$. Nell'intervallo $(0, 2]$ la funzione g è strettamente decrescente, nell'intervallo $[2, +\infty)$ è strettamente crescente e dunque g è iniettiva separatamente sui due intervalli e dunque si annulla solamente nei due punti x_1 e x_2. Dunque il segno di f', che coincide con il segno di g, è positivo per $0 < x < x_1$ e per $x_2 < x < +\infty$ e negativo per $x_1 < x < x_2$. Significa che f è strettamente crescente su $(0, x_1]$, strettamente decrescente su $[x_1, x_2]$ e strettamente crescente su $[x_2, +\infty)$.

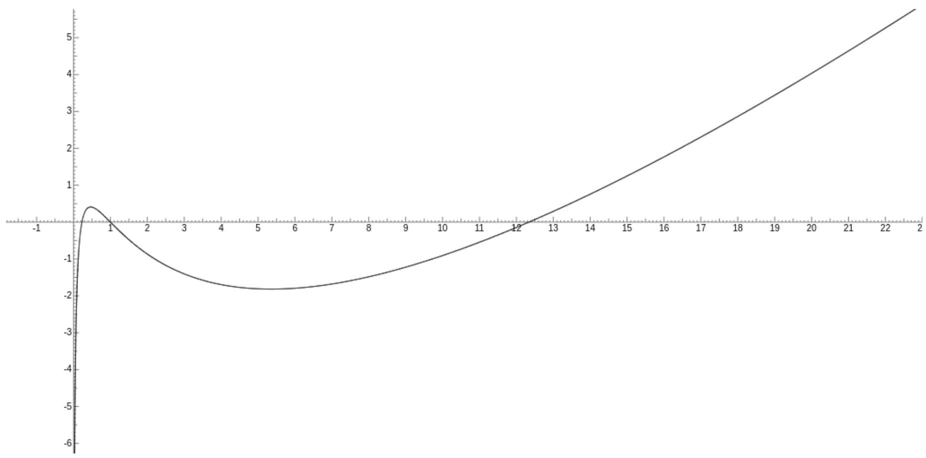

Figura 1: Il grafico della funzione $f(x)$.

Visto che $f(1) = 0$ e $x_1 < 1 < x_2$ si ha $f(x_1) > 0$ e $f(x_2) < 0$. Dunque l'equazione $f(x) = 0$ ha, oltre alla soluzione $x = 1$ altre due soluzioni reali positive, a e b con $a < 1 < 2 < b$. Ci sono quindi in totale tre soluzioni.

Per rispondere al secondo punto osserviamo che $f(e^2) = e^2 - (1+2)^2 = e^2 - 9 < 0$ e $f(e^{-2}) = e^{-2} - (1-2)^2 = e^{-2} - 1 < 0$. Dunque $a > e^{-2}$ e $b > e^2$ da cui $1/a < e^2 < b$. □

2. *Esercizio 2.* Determinare i valori del parametro $\alpha > 0$ per i quali la seguente serie numerica converge:

$$\sum_k \frac{1}{k^\alpha} - \sin\left[\left(\sin\frac{1}{k}\right)^\alpha\right].$$

Soluzione. Si tratta di studiare la convergenza della serie

$$\sum_k f(1/k)$$

con $f(x) = x^\alpha - \sin\sin^\alpha x$. Sarà quindi utile fare lo sviluppo di taylor di f per $x \to 0^+$ per poter determinare l'andamento asintotico di $f(1/k)$ per $k \to +\infty$.

Ricordando che per $t \to 0^+$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$
$$(1-t)^\alpha = 1 - \alpha t + o(t)$$

si ottiene

$$\sin^\alpha x = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^\alpha = x^\alpha(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2))^\alpha$$
$$= x^\alpha(1 - \frac{\alpha}{6}x^2 + o(x^2)) = x^\alpha - \frac{\alpha}{6}x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2}).$$

E quindi

$$\begin{aligned}
\sin\sin^\alpha x &= \sin^\alpha x - \frac{1}{6}(\sin^\alpha x)^3 + o(\sin^{3\alpha} x) \\
&= x^\alpha - \frac{\alpha}{6}x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2}) - \frac{1}{6}(x^\alpha + o(x^\alpha))^3 + o(x^{3\alpha}) \\
&= x^\alpha - \frac{\alpha}{6}x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2}) - \frac{1}{6}x^{3\alpha} + o(x^{3\alpha}).
\end{aligned}$$

Dobbiamo quindi distinguere tre casi. Se $\alpha > 1$ allora $\alpha + 2 < 3\alpha$ e quindi $x^{\alpha+2} \gg x^{3\alpha}$ se $\alpha < 1$ allora $x^{\alpha+2} \ll x^{3\alpha}$ mentre se $\alpha = 1$ allora $x^{\alpha+2} = x^{3\alpha}$. Dunque

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{6}x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2}) & \text{se } \alpha > 1 \\ \left(\frac{\alpha}{6} + \frac{1}{6}\right)x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2}) & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{1}{6}x^{3\alpha} + o(x^{3\alpha}) & \text{se } \alpha < 1. \end{cases}$$

In tutti i casi risulta che la serie $\sum_k f(1/k)$ ha termini definitivamente positivi, essendo $\alpha > 0$. Se $\alpha > 1$ si ha $f(1/k) \sim \frac{\alpha}{6k^{\alpha+2}}$ e la serie converge in quanto in questo caso $\alpha + 2 > 1$. Lo stesso vale se $\alpha = 1$. Se $\alpha < 1$ si ha $f(1/k) \sim \frac{1}{6k^{3\alpha}}$ e la serie converge se e solo se $3\alpha > 1$, cioè se $\alpha > \frac{1}{3}$. In definitiva la serie converge se e solo se $\alpha > \frac{1}{3}$. □

3. *Esercizio 3.* Sia $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la successione di funzioni

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(x^n).$$

(a) Determinare l'insieme I dei punti $x \in \mathbb{R}$ per i quali esiste, finito, il limite puntuale:
$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$
Dimostrare che non c'è convergenza uniforme di f_n verso f su I.

(b) Mostrare che per ogni $c \in (0, 1)$ c'è convergenza uniforme sugli intervalli $[-1 + c; 1 - c]$ e $[1 + c; +\infty)$.

(c) Dimostrare che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0$.

Soluzione. Per $n \to +\infty$ si ha $x^n \to 0$ se $-1 < x < 1$, $x^n = 1$ se $x = 1$, $x^n \to +\infty$ se $x > 1$ e $x^n = (-1)^n|x|^n$ non ha limite se $x \le -1$. Dunque il limite puntuale di $f_n(x)$ esiste ed è finito se $x > -1$ e risulta

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} 0 = 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} & \text{se } x = 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Il limite non esiste se $x = -1$ (la successione $f_n(-1)$ oscilla tra i valori $\pm \operatorname{arctg} 1$) e non esiste se $x < -1$ (la successione $f_n(x)$ tende a $\frac{\pi}{2}$ quando n è pari e tende a $-\frac{\pi}{2}$ quando n è dispari). Dunque l'insieme I dei punti per cui esiste il limite puntuale è $I = (-1, +\infty)$.

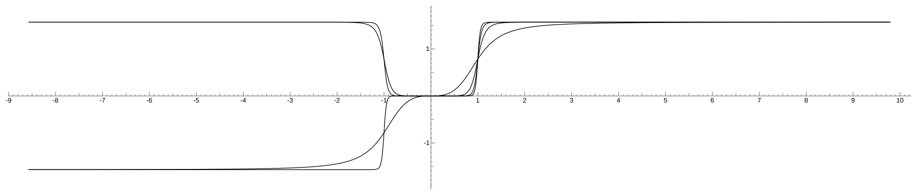

Figura 2: I grafici delle funzioni f_n.

Abbiamo quindi mostrato che $f_n(x) \to f(x)$ per $x > -1$ fissato e $n \to +\infty$. Ma le funzioni f_n sono continue mentre $f(x)$ non è continua. Questo significa che la convergenza non può essere uniforme su nessun intervallo (non banale) che contiene il punto $x = 1$.

Ricordiamo che sull'intervallo $[-1+c, 1-c]$ si ha $f(x) = 0$. Inoltre è facile verificare che $|f_n(x)|$ è decrescente sull'intervallo $(-1, 0]$ e crescente sull'intervallo $[0, 1)$. Dunque

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,1-c]} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x\in[0,1-c]} |f_n(x)| \\ &= |f_n(1-c)| \to f(1-c) = 0 \qquad \text{per } n \to +\infty\end{aligned}$$

e c'è convergenza uniforme su $[0, 1-c]$. Analogamente

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[-1+c,0]} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x\in[-1+c,0]} |f_n(x)| \\ &= |f_n(-1+c)| \to |f(-1+c)| = 0 \qquad \text{per } n \to +\infty\end{aligned}$$

e c'è convergenza uniforme anche su $[-1+c, 0]$.

Sull'intervallo $[1+c; +\infty)$ si ha $f(x) = \frac{\pi}{2}$ ed è facile verificare che $f_n(x)$ è crescente e minore di $\frac{\pi}{2}$. Dunque

$$\begin{aligned}\sup_{x>1+c} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x>1+c} \left(\frac{\pi}{2} - f_n(x)\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - f_n(1+c) \to \frac{\pi}{2} - f(1+c) = 0 \qquad \text{per } n \to +\infty\end{aligned}$$

e c'è convergenza uniforme anche su $[1+c; +\infty)$. Si può quindi concludere che c'è convergenza uniforme sull'unione di questi tre intervalli.

Per l'ultimo punto osserviamo che l'integrale può essere spezzato, per additività:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\,dx &= \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|\,dx + \int_{1}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} |f_n(x)|\,dx + \int_{1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - f_n(x)\right)dx\end{aligned}$$

in quanto la funzione integranda è positiva e quindi gli integrali esistono.

Sull'intervallo $(-1, 1)$ si ha $|f_n| \leq \frac{\pi}{2}$ e, per quanto già visto, si ha convergenza uniforme di $|f_n|$ a 0 su ogni intervallo $[\alpha, \beta]$ contenuto in $(-1, 1)$.

Grazie al teorema di convergenza dominata possiamo scambiare il limite con l'integrale e concludere che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1}|f_n(x)-f(x)|\,dx=\int_{-1}^{1}0\,dx=0.$$

Sull'intervallo $[1,+\infty)$ se $n\geq 2$ si ha che $f_n(x)\geq f_2(x)$ e quindi

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)| = \frac{\pi}{2}-f_n(x) \leq \frac{\pi}{2}-f_2(x) &= \frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x^2\\ &= \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\sim\frac{1}{x^2} \qquad \text{per } x\to+\infty.\end{aligned}$$

Dunque $g(x)=\frac{1}{x^2}$ è integrabile su $[1,+\infty)$ e domina la successione f_n se escludiamo il primo termine $n=1$. Anche in questo caso possiamo quindi applicare il teorema di convergenza dominata e concludere che il limite cercato è nullo. $\square$