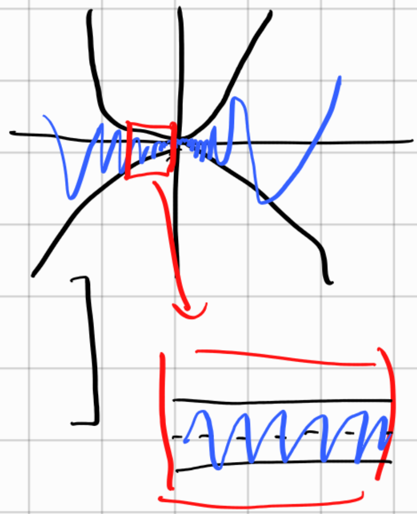
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 32 - 4.12.2023



Derivate

Esercizio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

f è derivabile?

$x^2 \sin \frac{1}{x}$ è derivabile perché prodotto di fn. derivabili

$f(x)$ è derivabile se $x \neq 0$ (località della derivata)

se $x \neq 0$ $\quad f'(x) = \left(x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \right)' = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} + \cancel{x^2} \left(\cos \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)$

$= 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$

$\underline{\lim_{x \to 0} f'(x)}$ non esiste perché $\lim_{y \to \pm\infty} \cos(y)$ non esiste

NON posso concludere che $f'(0)$ non esiste.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \underbrace{h}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{h}}_{\text{limitato}} = 0$$

f è derivabile.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

f' non è continua in $x = 0$ $\quad$ ($\lim_{x \to 0} f'(x)$ non esiste)

E' POSSIBILE CHE LA DERIVATA NON SIA CONTINUA!

Teorema (criterio di derivabilità)

Se f è continua in x_0 e derivabile per $x \neq x_0$ e se $\lim_{x \to x_0} f'(x) = m \in [-\infty, +\infty]$

allora $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = m$.

dim

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \overset{\text{lagrange}}{=} f'(y) \qquad \exists\, y \in (x_0, x_0+h) \quad [x_0, x_0+h]$$

per $h \to 0$ $\qquad y = y(h) \to x_0$ per $h \to 0$

$f'(y) \to m$ per $h \to 0$. (Ipotesi).

$\square$

Es $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$ è derivabile?

Se $x \neq 0$: $f'(x) = \left(x \cdot \sin \frac{1}{x}\right)' = 1 \cdot \sin \frac{1}{x} + x \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$$= \sin \frac{1}{x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{x} \to \pm\infty$$

non ha limite per $x \to 0$

non si applica il teorema (ma si potrebbe avere)

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \sin \frac{1}{h} \quad \text{non ha limite}$$

f non ha derivata in $x = 0$.

Es $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$

è continua, è derivabile per $x \neq 0$.

E' derivabile anche per $x=0$?

Se $x\neq 0$: $f'(x) = \dfrac{(\cos x)\, x - (\sin x)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} =$

$$= \frac{\cos x - \frac{\sin x}{x}}{x} = \frac{\cos x - 1}{x} + \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{x}$$

$$\frac{\cos x - 1}{x} \to 0$$

$$= \frac{\cos x - 1}{x} + \frac{x - \sin x}{x^2} \longrightarrow 0$$

$$\frac{\cos x - 1}{x} \to 0 \qquad \frac{x - \sin x}{x^2} \to 0$$

Hospital $\rightarrow \dfrac{1-\cos x}{2x} \rightarrow 0$

Teo (De L'Hospital) Se $f(x)\to 0$, $g(x)\to 0$ per $x\to x_0$

$f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$

I intervallo

$\nearrow$ derivabili

Hyp $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \neq x_0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Se il limite a destra esiste.

Fine esercizio: $f'(0) = 0$.

f è derivabile su tutto il suo dominio

Oss L'Hospital fornisce una dimostrazione alternativa del teorema di derivabilità:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f'(x+h)-0}{1} = f'(x+h) \to m$$

$f(x+h)-f(x) \to 0$ se f è continua in x $\square$

dim (Hospital) per $x \to x_0$

$f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ f,g su $I \setminus \{x_0\}$ le estendo a tutto I per continuità: $f(x_0)=0$, $g(x_0)=0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$$

$[x_0, x]$ $(x > x_0)$

$$= \frac{f'(y)}{g'(y)} \qquad \exists\, y \in (x_0, x),\ y = y(x) \to x_0 \text{ per } x \to x_0$$

$\downarrow y \to x_0$

ℓ

dunque $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \ell$ per $x \to x_0$ $\square$.

⚠ Attenzione: è possibile che il limite a sinistra esista anche se quello a destra non esiste!

$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$

$g(x) = x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{1}$$ non ha limite per $x \to 0$. $\square$

- L'Hospital vale anche nel caso $x_0 = +\infty$ $x_0 = -\infty$.

Basta fare un cambio di variabile:

$x \to +\infty$ $\quad F(y) = f\left(\frac{1}{y}\right)$ $\quad F'(y) = f'\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right)$

$y = \frac{1}{x}$

$y \to 0^+$ $\quad G(y) = g\left(\frac{1}{y}\right)$ $\quad G'(y) = g'\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right)$

$$\frac{F'(y)}{G'(y)} = \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)} \longrightarrow m \qquad (\text{-------}) \qquad \square$$

L'Hospital vale anche se siamo nel caso $\frac{*}{\pm\infty}$

la dimostrazione è MOOOLTO più complicata.

[vedere sugli appunti].

<u>MORALE</u>: esistono funzioni derivabili la cui derivata non è continua.

<u>Def</u> [classi di regolarità]

diremo che f è di classe C^0 se f è continua, f è di classe C^1 se f è derivabile (su tutto il suo dominio) e f' è continua.

se f' è a sua volta derivabile e se $(f')' = f''$ è continua diremo che f è C^2.

Così via (induttivamente).

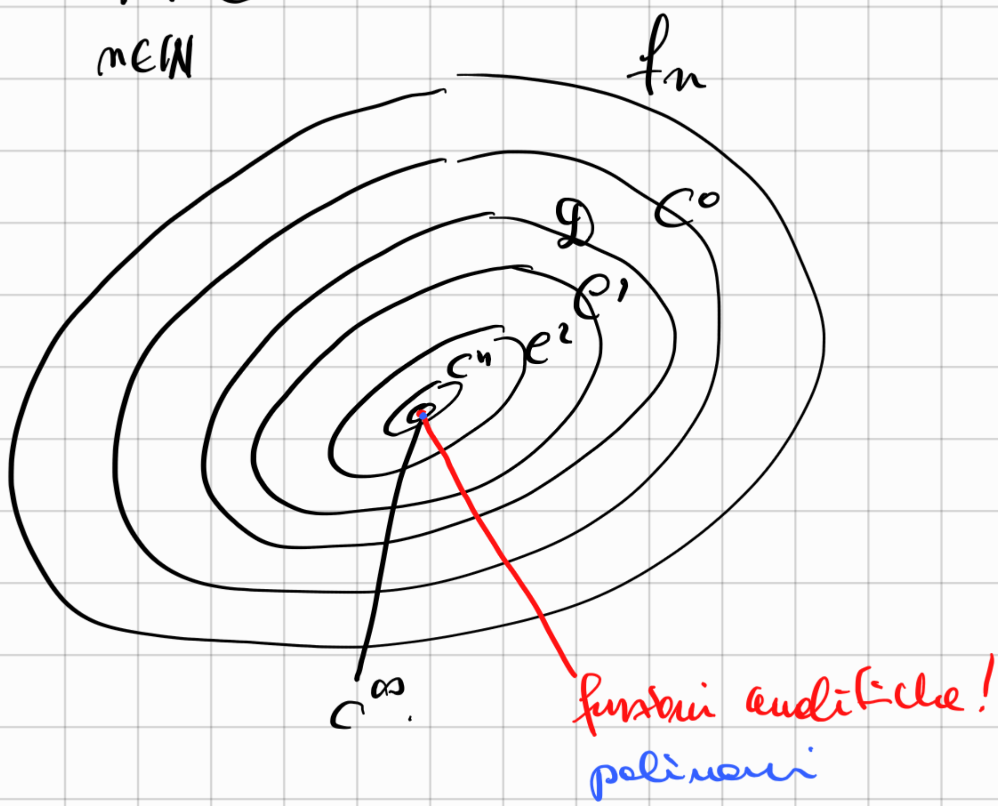
derivata n-esima

$$f \in C^{n+1} \text{ se } f \in C^n,\ f^{(n)} \text{ è derivabile}$$
$$\text{e } f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)' \text{ è continua.}$$

<u>Def</u> Diremo che f è di classe C^∞ se

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad f$ è di classe C^n.

$$C^\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n$$



Corollario Le funzioni analitiche sono di classe C^∞.

$\Uparrow$

Teorema Sia

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

una serie di potenze con raggio di conv. $R > 0$.
Allora f è derivabile $\forall z$ con $|z| < R$
la sua derivata è:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, a_k z^{k-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1) a_{j+1} z^j$$

e questa serie di potenze ha raggio di convergenza R (lo stesso di prima).

dim (1) Faccio la derivata in $z = 0$

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} = \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k - a_0}{z} = \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^k}{z} =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^{k-1} = \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} a_{j+1} z^j}_{} \xrightarrow[z \to 0]{} a_1 = 1 \cdot a_1$$

$\Box$

↑ è una funzione continua!

<u>Teorema</u> $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ è continua in $z = 0$.

<u>dim</u>

$$f(z) - f(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k - a_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^k$$

$$|f(z) - f(0)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \, |z|^k =$$

$$= \underset{\downarrow\, 0}{|z|} \sum_{j=0}^{+\infty} |a_{j+1}| \, |z|^j \le |z| \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} |a_{j+1}| \rho^j}_{}$$

con $\rho < R$

↗ per $|z|$ abbastanza piccolo

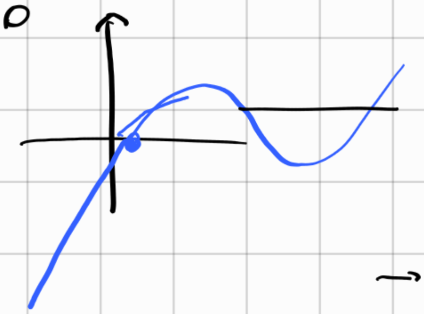
è convergente perché $\sum a_k \rho^k$ è assolutamente convergente

$\Box$

<u>Esempio</u>

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{per } x \ge 0 \\ x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

di che classe è?



→