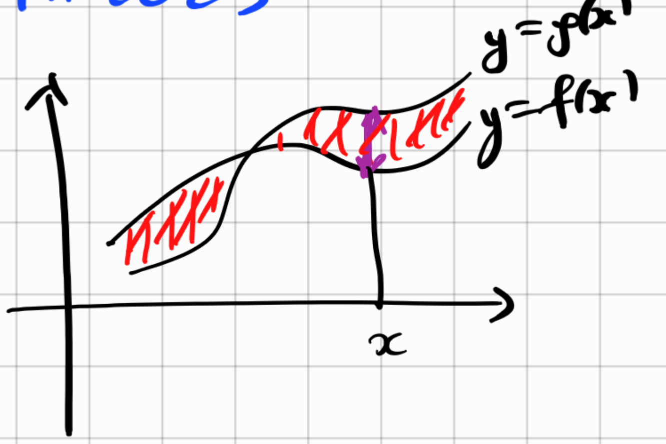
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 27 — 22.11.2023

Convergenza uniforme



$$f, g : A \to \mathbb{C} \text{ o } \mathbb{R}$$

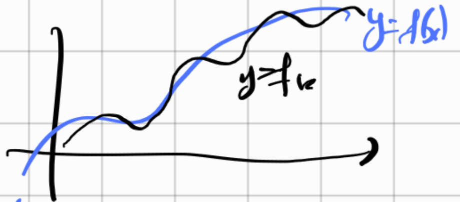
$$\|f-g\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)-g(x)|$$

f_k successione

convergenza "semplice" o "puntuale"
$f_k \to f$ se $\forall x$: $f_k(x) \to f(x)$.

$f_k \rightrightarrows f$ $\quad$ f_k converge uniformemente a f

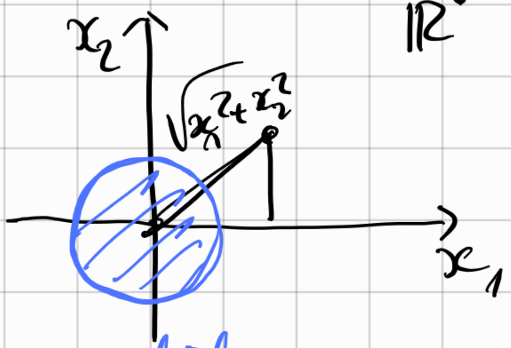
se $\|f_k - f\|_\infty \to 0$



Nota è una norma "non euclidea"

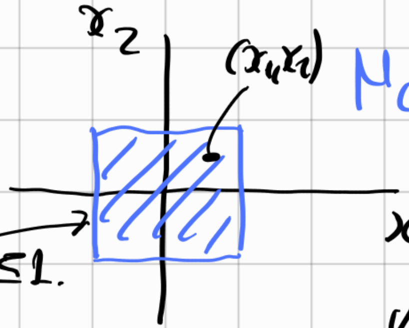
perché $\|\cdot\|_\infty$?

$\mathbb{R}^n$ $\quad \|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$



euclidea

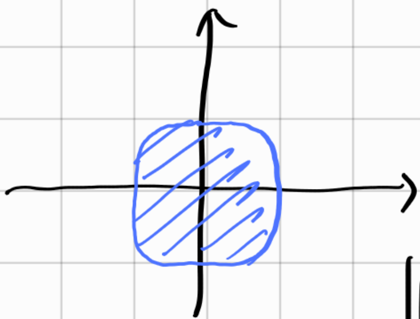
B_1

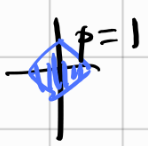


Manhattan

$\max\{|x_1|, |x_2|\} \le 1.$

$$\|\underline{x}\|_\infty = \max_{k=1\dots n}\{|x_k|\}$$





$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Esercizio $\quad \lim_{p \to +\infty} \left(|x|^p + |y|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \max\{|x|, |y|\}$

[Per le funzioni $\|f\|_2 = \sqrt{\int |f|^2}$

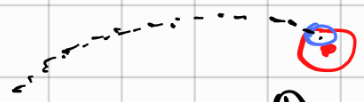
$f : A \to \mathbb{R}$ $\qquad (f, g) = \int f \cdot g$]

In dimensione infinita uno spazio vettoriale può avere diverse norme.

Tipicamente c'è una norma "più naturale" che rende lo spazio completo

↑ ogni successione di Cauchy converge.

x_n è di Cauchy se $\forall \varepsilon > 0$ x_n sta definitivamente in una palla di raggio ε



$\mathbb{Q}$ non è completo $\qquad \mathbb{R}$ è completo

La distanza uniforme rende completo

$C_b = \{$ funzioni continue e limitate $\}$

Teo $f_k \rightrightarrows f$, se f_k sono continue allora anche f è continua.

Continuità della somma di una serie di potenze.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot z^k}_{= S_n(z) \text{ sono polinomi}}$$

Se fosse:

$$S_n \rightrightarrows f$$

visto che S_n sono continue anche f sarebbe continua.

Esempi di funzioni analitiche

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad R = +\infty$$

$$\sqrt[k]{k!} \to +\infty$$

$$\Uparrow$$

$$\frac{(k+1)!}{k!} = k+1$$

$$\Downarrow$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

Funzioni continue

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

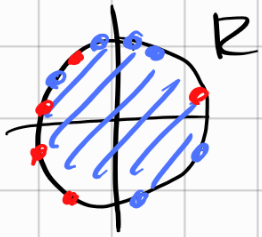
$$\cos x = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$\frac{1}{z}$ è analitica (esercizio volta scorsa)

Teorema Sia $f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R>0$.

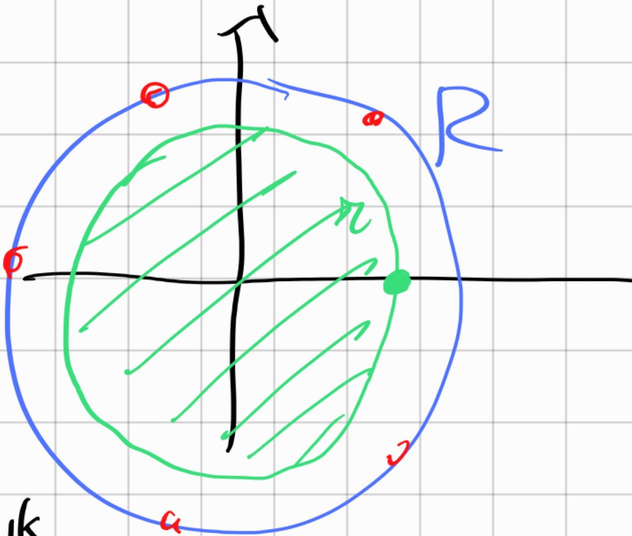
Allora $f : A \to \mathbb{C}$, $B_R \subseteq A \subseteq \overline{B_R}$

$f : B_R \to \mathbb{C}$ è continua.



(f potrebbe non essere continua in alcuni punti di ∂B_R circonferenza)

dim Prendiamo $r<R$ e dimostriamo che $S_n(z)=\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ convergono uniformemente a $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ su B_r



Infatti

$$\|f-S_n\|_\infty = \sup_{|z|<r} \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k\right|$$

$\sum^{\infty}$ $\sum^{n-1}$ su B_r

$$\le \sup_{|z|<r} \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|\cdot|z|^k$$

$|z|\le r \Rightarrow |z|^k \le r^k$

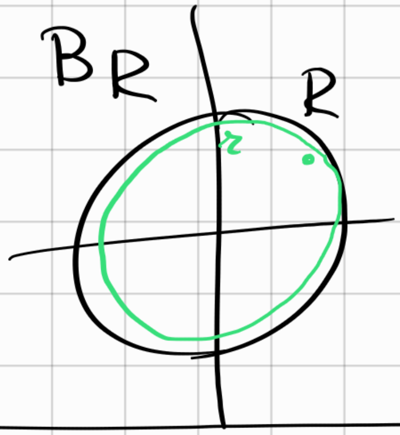
$$\le \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|\cdot r^k \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

coda di una serie convergente

Già visto usando le successioni di Cauchy

Dunque f è continua su B_r.
Ma questo è vero $\forall r < R$.
Quindi f è continua su tutto B_R

[Scelto $|z|<R$ prendo $|z|<r<R$]



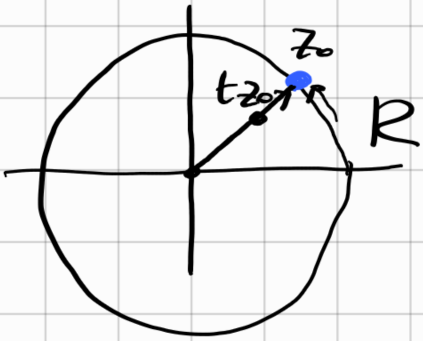
□

Oss Se $R=+\infty$ la funzione $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ è continua su tutto $\mathbb{C}$.

Cosa succede sulla frontiera di B_R? (∂B_R)

Teorema (Lemma di Abel)

Sia $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z_0^k$ convergente.



Allora $g:[0,1]\to\mathbb{C}$

$$g(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (t z_0)^k$$

è una funzione continua.

dim g è continua in $[0,1)$ per il teorema precedente.
Devo mostrare che g è continua in $t=1$.

Supponiamo $g(1)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z_0^k = a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + \dots$

senza perdere di generalità.

devo mostrare che tende a zero per $t \to 1^-$

$$\boxed{g(t)-g(1)} = g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (t z_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z_0^k \cdot t^k \quad (\ast)$$

Per parti

$$\to \sum_{k=0}^{n-1} a_k z_0^k \cdot t^k = A_n \cdot t^n - \cancel{A_0 B_0} - \sum_{k=0}^{n-1} A_{k+1} (t^{k+1} - t^k)$$

$$\left[\begin{array}{l} A_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z_0^k \\ B_n = t^n \to b_n = t^{n+1} - t^n \end{array} \right.$$

$$\boxed{\sum a_k B_k = A_n B_n - \sum A_k b_k}$$

$$= A_n t^n + (1-t) \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} A_{k+1} \cdot t^k}$$

$A_n \to 0$, $t^n \to 0$ se $n \to +\infty$

per ipotesi di comodo

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z_0^k \to \sum_{k=0}^{\infty} a_k z_0^k = 0$$

$$\longrightarrow 0 \cdot 0 + (1-t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_{k+1} t^k$$

$$g(t) = \underbrace{(1-t) \sum_{k=0}^{n-1} A_{k+1} t^k}_{\text{fissato } n \text{ tende a zero per } t \to 1^-} + \underbrace{(1-t) \sum_{k=n}^{\infty} A_{k+1} t^k}_{(\ast)}$$

$\forall \varepsilon > 0$ Posso scegliere n in modo che $|A_{k+1}| < \varepsilon$ per $k \geq n$.

$$(\ast) = \left| (1-t) \sum_{k=n}^{+\infty} A_{k+1} t^k \right| \leq (1-t) \sum_{k=n}^{+\infty} |A_{k+1}| t^k$$

$$\leq (1-t)\,\varepsilon \sum_{k=n}^{+\infty} t^k = (1-t)\,\varepsilon\, t^n \sum_{k=0}^{+\infty} t^k$$

$$= \cancel{(1-t)}\,\varepsilon\, t^n \frac{1}{\cancel{1-t}} = \varepsilon t^n$$

$$\limsup_{t\to 1^-} |g(t)| = 0 + \limsup_{t\to 1^-} (*)$$

$$\leq \limsup_{t\to 1^-} \varepsilon t^n = \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \limsup_{t\to 1^-} |g(t)| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 1^-} |g(t)| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 1^-} g(t) = 0 = g(1)$$

$\square$