ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 7 — 2.10.2023

Immagine/controimmagine $\qquad f : A \to B$

$D \subseteq A \quad f(D) = \{ f(x) : x \in D \} = \{ y \in B : \exists x \in D : f(x) = y \}$

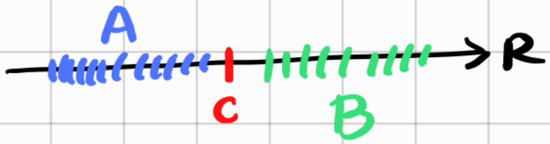
immagine di D

$C \subseteq B \quad f^{-1}(C) = \{ x \in A : f(x) \in C \}$

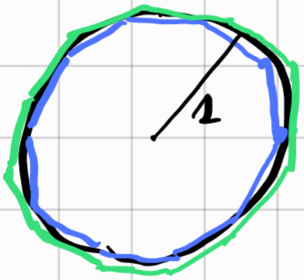
controimmagine

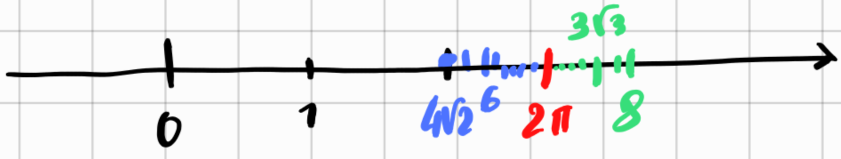
La retta dei reali

R gruppo additivo, $0 \in R$, $+$, totalmente ordinato, $\leq$ denso, continuo.



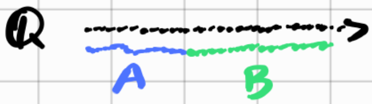
ES





Esiste? Si può costruire $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$

sezioni di Dedekind.



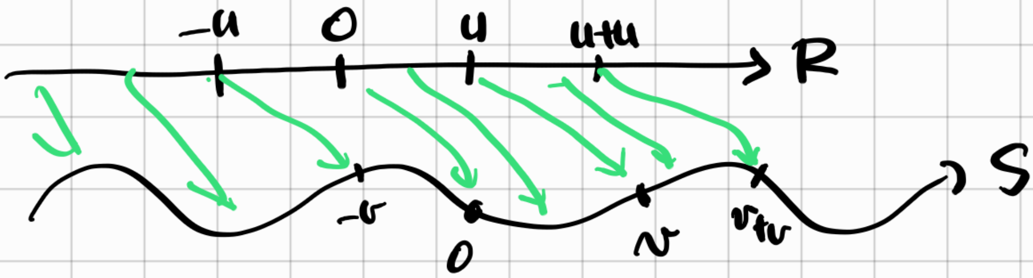
È unico? Sì, a meno di isomorfismi.

$R \xrightarrow{\varphi} S \qquad \varphi$ è un isomorfismo se

$$\begin{cases} \varphi \text{ è biiettiva} \\ \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \\ x \leq y \iff \varphi(x) \leq \varphi(y) \end{cases}$$

omomorfismo

Teorema (isomorfismo) Se R e S sono due gruppi totalmente ordinati densi e continui



$(v<0)$

Dato $u>0$ in R dato $v>0$ in S esiste una unica $\varphi: R \to S$ tale che:

(omomorfismo)

(i) $\varphi(u) = v$

(ii) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ $\quad (\Rightarrow \varphi(0)=0)$

$(\geq)$

(iii) $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$ (monotonia)

equivalentemente $\quad (\leq)$

(iii') $x \geq 0 \Rightarrow \varphi(x) \geq 0$. $\quad$ (iii' + ii $\Rightarrow$ iii).

inoltre φ è bigettiva.

Useremo questo teorema per definire:

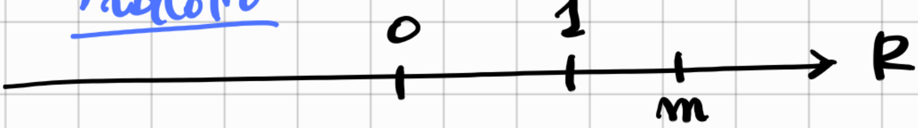
- prodotto

$\sqrt[n]{x}$ radici.. $\qquad \sin x$, $\cos x$ ...

a^x potenze..

unità $u>0$ arbitraria.

Prodotto



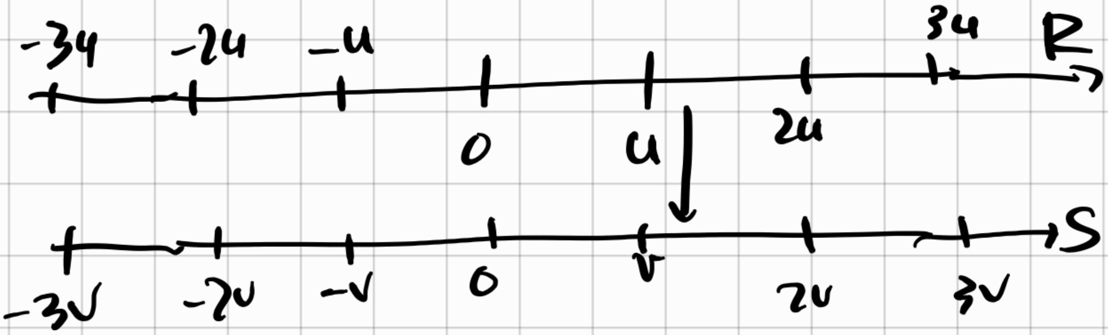
$m \cdot x = ?$ $\qquad \exists! \ \varphi: R \to R$

$1 \mapsto m$

$m \cdot x = \varphi(x)$ $\qquad |$ $m>0$

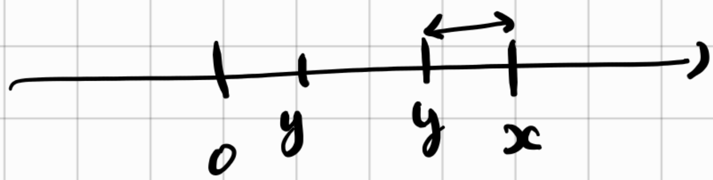
Idea di come si dimostra il teo. di isomorfismo.

1. addizione ripetuta $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad nx = \overbrace{x+x+\dots+x}^{n\text{-volte}}$



2. esistenza di numeri arbitrariamente piccoli

densità



$$\forall x>0 \ \forall n\in\mathbb{N} \ \exists\, y>0 \ \text{t.c.} \ ny < x .$$

ma anche

3. $\forall x>0 : \forall y>0 : \exists n \in \mathbb{N} : ny > x .$

molto grande

molto piccolo

proprietà Archimedea.

in particolare: $\mathbb{N}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}$

$\{0, u, 2u, 3u, \dots\}$ non è limitato

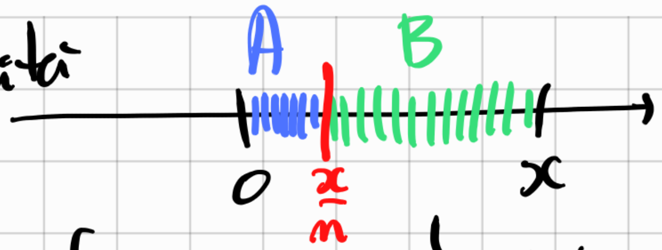
si dimostra con la continuità.

4. Divisibilità $\forall x\in\mathbb{R} \ \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$\exists!\, y\in\mathbb{R} \ \text{t.c.} \ ny = x$$

$$y = \frac{x}{n}$$

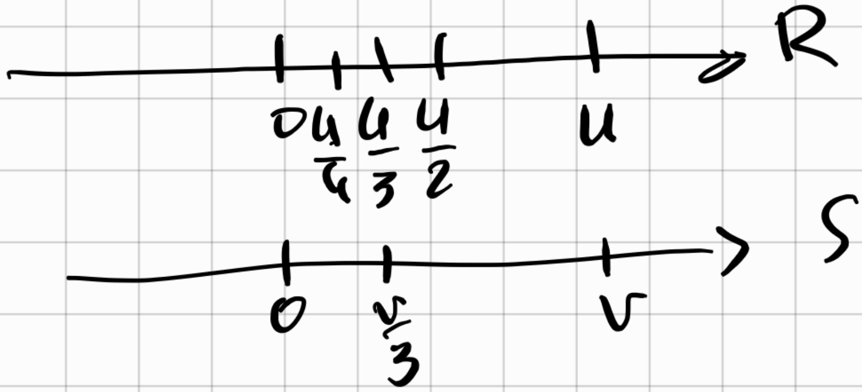
continuità $\qquad\qquad$ $\underline{\underline{x>0}}$



$$A = \{ y : ny \le x \} \neq \emptyset \quad \text{per } (2)$$

$$B = \{ y : ny \ge x \} \neq \emptyset \quad (\text{banalmente } \neq \emptyset).$$

5. abbiamo definito $\mathbb{Q}$ dentro $\mathbb{R}$.



$$3\,\frac{u}{3} = u$$

$$\frac{u}{3} + \frac{u}{3} + \frac{u}{3} = u$$

$$\varphi\left(\frac{u}{3} + \frac{u}{3} + \frac{u}{3}\right) = \varphi(u) = v$$

omomorfismo $\longrightarrow$

$$= \varphi\left(\frac{u}{3}\right) + \varphi\left(\frac{u}{3}\right) + \varphi\left(\frac{u}{3}\right)$$

$$= 3 \cdot \varphi\left(\frac{u}{3}\right) = v \qquad \varphi\left(\frac{u}{3}\right) = \frac{v}{3}$$

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\,u\right) = \frac{p}{q}\,\varphi(u)$$

Ma in R vedremo che ci sono numeri non razionali.

$\mathbb{Q}\cdot u = \{p\cdot \frac{u}{q},\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N},\ q\neq 0\}$

$\mathbb{Q}v$

φ deve mandare "punti intermedi" in punti intermedi:

$$x<y<z$$

$$\varphi(x)<\varphi(y)<\varphi(z)$$

Fissato $y\in R$

$\forall n\in\mathbb{N}\ \exists\, x,z$ t.c. $x<y<z$

$$z-x<\frac{u}{n}.$$

Allora $\exists!\ w$: $\forall n$: $\varphi(x)<w<\varphi(z)$

(Proprietà archimidea: non $\exists\, x>0$ e $\forall n$ $x<\frac{1}{n}$)

Unicità R e S sono isomorfi li indico $\mathbb{R}$
e diremo $1=u$.

Moltiplicazione come già detto
possiamo definire $m\cdot x$ $\forall m\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ è un gruppo moltiplicativo.

Inoltre vale proprietà associativa $m\cdot(x+y)=mx+my$

Si dice allora che $\mathbb{R}$ è un campo (come $\mathbb{Q}$).

Elevamento a potenza

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ è un gruppo moltiplicativo totalmente ordinato chiuso e continuo

$(\mathbb{R}, +)$ è isomorfo a $(\mathbb{R}^+, \cdot)$

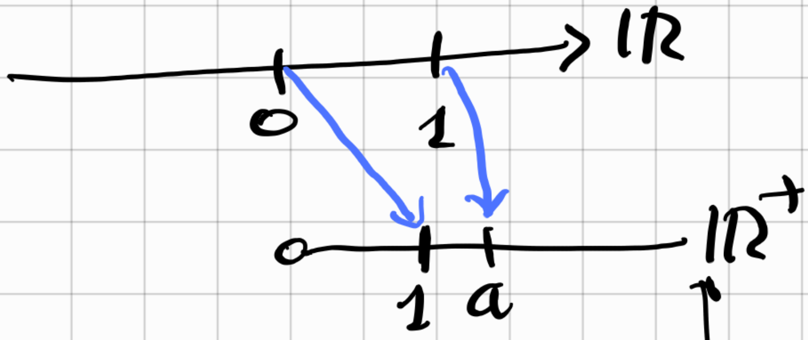
fissato $a \in \mathbb{R}^+$ $\exists!\ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

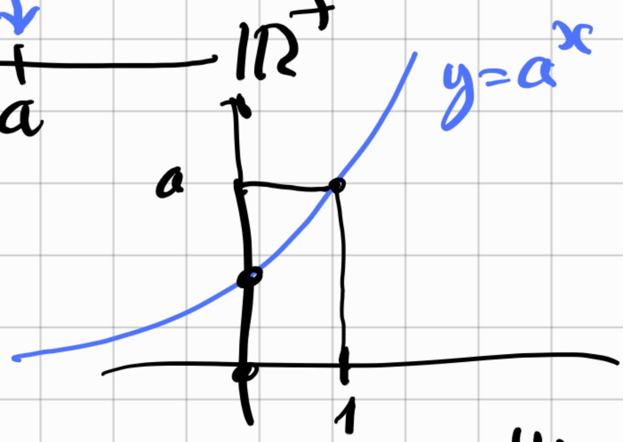
$1 \mapsto a$

$(x+y) \mapsto \varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

$x < y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y)$

$\varphi(x) = a^x$.





$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

$(a^x)^y = a^{xy}$

$(a \cdot b)^x = a^x b^x$

$\vdots$

$\varphi(y) = (a^x)^y$

$\psi(y) = a^{x \cdot y}$

$\varphi(1) = a^x = \psi(1)$

$\Downarrow$

$\varphi = \psi$