Analisi Matematica A e B
Prova scritta parziale n. 3

Laurea in Fisica, a.a. 2022/23
Universitá di Pisa

22 aprile 2023

1. (i) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log^\alpha x}{x^3}\, dx.$$

(ii) Calcolare l'integrale per ogni $\alpha \in \mathbb{N}$.

Soluzione. L'integrale improprio ha come punti *"cattivi"* i punti $x = +\infty$ e, se $\alpha < 0$, il punto $x = 1$.

Chiamata $f(x) = \frac{\log^\alpha x}{x^3}$ la funzione integranda si osserva che conoscendo gli ordini di infinito di log e potenza, per $x \to +\infty$ si ha $f(x) \ll \frac{1}{x^2}$, qualunque sia α. Dunque sapendo che l'integrale di $\frac{1}{x^2}$ è convergente in un intervallo intorno di $+\infty$, per confronto asintotico possiamo dedurre che anche l'integrale di $f(x)$ è convergente in tale intorno.

Per $x \to 1$ si ha $\log x \sim x - 1$ e quindi $f(x) \sim \frac{1}{(x-1)^{-\alpha}}$. Sapendo che $\frac{1}{(x-1)^p}$ è integrabile in un intorno di $x = 1$ se e solo se $p < 1$, per confronto asintotico deduciamo che anche l'integrale dato converge, in un intorno di $x = 1$, se e solo se $\alpha > -1$.

Dunque l'integrale dato converge se e solo se $\alpha > -1$.

Per il punto (ii) chiamiamo I_α l'integrale dato e proviamo ad effettuare una integrazione per parti. Deriviamo il logaritmo e integriamo la potenza x^{-3}, se $\alpha > 0$ si ha:

$$\begin{aligned}
I_\alpha &= \int_1^{+\infty} \frac{\log^\alpha x}{x^3}\, dx \\
&= \left[\log^\alpha x \cdot \frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\alpha \log^{\alpha-1} x}{x} \cdot \frac{x^{-2}}{-2}\, dx \\
&= [0 - 0] + \frac{\alpha}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\log^{\alpha-1}}{x^3}\, dx = \frac{\alpha}{2} \cdot I_{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Se $\alpha = 0$ si ha invece:

$$I_0 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Dunque se $\alpha = n \in \mathbb{N}$ la successione I_n è definita ricorsivamente da:

$$\begin{cases} I_0 = \frac{1}{2} \\ I_{n+1} = \frac{n+1}{2} \cdot I_n \end{cases}$$

ed è facile verificare, con una dimostrazione per induzione, che risulta

$$I_n = \frac{n!}{2^{n+1}}.$$

Si può anche osservare che per tutti i valori $\alpha > -1$ si può ricondurre l'integrale alla funzione Γ di Eulero:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Effettuando il cambio di variabile $t = \log x$, $dt = \frac{1}{x}\, dx$, e poi $2t = s$, $dt = \frac{ds}{2}$ si ha infatti:

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \int_1^{+\infty} \frac{\log^\alpha x}{x^2} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{e^{2t}}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^\alpha}{e^s} \frac{1}{2} ds = \frac{1}{2 \cdot 2^\alpha} \int_0^{+\infty} s^\alpha e^{-s}\, ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

In effetti sappiamo che $n! = \Gamma(n+1)$ quindi questo risultato conferma il precedente.

□

2. Trovare tute le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' + u' - 42u = 1 + e^{6x}. \tag{1}$$

Soluzione. Si tratta di una equazione differenziale lineare non omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti. Il polinomio associato all'equazione è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 42 = (\lambda + 6)(\lambda - 7).$$

Dunque le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono:

$$u_0(x) = c_1 e^{6x} + c_2 e^{-7x}.$$

Per determinare una soluzione particolare u_* dell'equazione non omogenea possiamo sfruttare il principio di sovrapposizione e il metodo di similarità. Osserviamo che il coefficiente 6 ha molteplicità 1 come radice del polinomio P, dunque cerchiamo una soluzione della forma:

$$u_*(x) = A + Bxe^{6x}.$$

Si avrà

$$u_*' = (B + 6Bx)e^{6x},$$
$$u_*'' = (12B + 36Bx)e^{6x}.$$

Sostituendo $u = u_*$ nell'equazione non omogenea si ottiene

$$(12B + 36Bx)e^{6x} + (B + 6Bx)e^{6x} - 42\big(A + Bxe^{6x}\big) = 1 + e^{6x}$$

da cui

$$13Be^{6x} - 42A = 1 + e^{6x}$$

ovvero $A = -\frac{1}{42}$ e $B = \frac{1}{13}$. Dunque $u_*(x) = -\frac{1}{42} + \frac{1}{13}xe^{6x}$ e la soluzione generale dell'equazione differenziale non omogenea è, al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$u(x) = -\frac{1}{42} + \left(c_1 + \frac{1}{13}\right)e^{6x} + c_2e^{-7x}.$$

$\square$

3. Data l'equazione differenziale

$$u'(x) \;=\; \frac{x}{u(x)}\,\sqrt{1 - u^2(x)} \tag{2}$$

(i) dimostrare che il problema di Cauchy, relativo a questa equazione, con condizione iniziale $u(0) = 1$ ammette una ed una sola soluzione data dalla funzione $u(x) = 1$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Si consideri il problema di Cauchy, relativo a (2), con condizione iniziale $u(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Determinare **la soluzione** ed il relativo intervallo massimale di esistenza.

(iii) (facoltativo) Determinare **le soluzioni** del problema di Cauchy, relativo a (2), con condizione iniziale $u(1) = 1$.

Soluzione. Si tratta di una equazione differenziale del primo ordine, in forma normale, a variabili separabili. Osserviamo che

(a) l'equazione ha senso solamente se $u(x) \in [-1, 1]$ e $u(x) \neq 0$;

(b) l'equazione non soddisfa il teorema di Cauchy-Lipschitz nei punti in cui $u(x) = \pm 1$;

(c) le funzioni costanti $u(x) = 1$ e $u(x) = -1$ sono soluzioni dell'equazione in quanto annullano sia il lato destro che il lato sinistro;

(d) se $u(x) > 0$ e $x > 0$ allora $u'(x) \geq 0$ e quindi u è crescente, se $u(x) > 0$ e $x < 0$ allora $u'(x) \leq 0$ e quindi u è decrescente. In particolare una tale soluzione ha minimo in $x = 0$.

Per il punto (i) notiamo che da (b) sappiamo che $u(x) = 1$ è una soluzione del problema di Cauchy ed effettivamente ha dato iniziale $u(0) = 1$. Inoltre visto che per (d) una tale soluzione ha minimo per $x = 0$ e per (a) non può mai superare il valore 1 deduciamo che tale soluzione è l'unica con quel dato iniziale.

Per il punto (ii) cerchiamo una soluzione con dato iniziale $u(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Visto che la soluzione deve essere continua e deve essere definita in un intervallo, per l'osservazione (a) dovrà assumere sempre valori compresi nell'intervallo $(0, 1]$. Per l'osservazione (b) non possiamo escludere che la soluzione possa incollarsi alla soluzione $u(x) = 1$. Visto che in $x = 0$ la soluzione assume un valore $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ per continuità ci sarà un intervallo I intorno di $x = 0$ in cui la soluzione assume valori strettamente compresi tra 0 e 1. In tale intervallo possiamo separare le variabili ed ottenere l'equazione

$$\frac{u(x) \cdot u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}} = x.$$

Se le funzioni coincidono anche le loro primitive coincidono:

$$\int \frac{u(x) \cdot u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}} \, dx = \int x \, dx$$

e con il cambio di variabile $u = u(x)$, $du = u'(x)dx$ si ottiene

$$\int \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} \, du = \int x \, dx$$

Una primitiva sul lato destro è banalmente $x^2/2$. Con il cambio di variabili $t = 1 - u^2$, $dt = -2u \, du$ si nota che anche il lato sinistro è un integrale immediato, e una primitiva è $-\sqrt{1 - u^2}$. Quindi si ottiene, per una qualche costante $c \in \mathbb{R}$:

$$-\sqrt{1 - u^2} + c = \frac{x^2}{2}$$

da cui

$$\sqrt{1 - u^2} = c - \frac{x^2}{2}.$$

Visto che il lato sinistro è sempre non negativo si dovrà avere, per ogni $x \in I$:

$$\frac{x^2}{2} \leq c. \tag{3}$$

Ricavando $u(x)$ si ottiene

$$u^2 = 1 - \left(c - \frac{x^2}{2}\right)^2$$

e quindi, ricordando che deve essere $u(x) > 0$,

$$u(x) = \sqrt{1 - \left(c - \frac{x^2}{2}\right)^2}. \tag{4}$$

Se vogliamo che la nostra soluzione soddisfi la condizione di Cauchy del punto (ii) dovrà essere

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = c - \frac{0^2}{2}$$

da cui si trova facilmente $c = \frac{1}{2}$ e quindi:

$$u(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{(1-x^2)^2}{4}}.$$

Per (3) che questa soluzione è valida solamente nell'intervallo $(-1, 1)$. Ma quando $x \to 1^-$ e quando $x \to -1^+$ si ha che $u(x) \to 1$ e quindi questa soluzione non è massimale in quanto si può estendere con il valore $u = 1$ al di fuori dell'intervallo $(-1, 1)$. La soluzione rimane derivabile nei punti $x = \pm 1$ in quanto l'equazione differenziale garantisce che anche le derivate coincidono in tali punti. Si ottiene quindi la soluzione massimale

$$u(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{(1-x^2)^2}{4}} & \text{se } |x| < 1 \\ 1 & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Non ci possono essere altre soluzioni in quanto nell'intervallo $(-1, 1)$ la soluzione è stata univocamente determinata ma le condizioni (a) e (d) impongono che la soluzione non possa più staccarsi dal valore 1 fuori da tale intervallo.

Per il punto (iii) osserviamo innanzitutto che entrambe le soluzioni del punto (i) e del punto (ii) soddisfano la condizione $u(1) = 1$ e sono quindi due diverse soluzioni del problema di Cauchy con tale dato. Ci potrebbero però essere altre soluzioni. Per le osservazionie (a) e (d) sappiamo che se $u(1) = 1$ allora $u(x) = 1$ anche per ogni $x \geq 1$. Ma per ogni $x_0 \in (0, 1]$ è possibile che la soluzione si stacchi dal valore 1 nel punto x_0. Se $x_0 = 1$ si ottiene la soluzione del punto (ii) ma se $x_0 < 1$ la soluzione potrà coincidere nell'intervallo $[0, x_0]$ con la funzione data da (4). Imponendo la condizione $u(x_0) = 1$ si trova

$$1 - (1^2) = c - \frac{x_0^2}{2}$$

Osserviamo infine che per $x < 0$ la soluzione dovrà seguire la curva data da (4) finche u non assume nuovamente il valore 1. Per simmetria tale punto sarà $-x_0$ e per ogni $x \leq -x_0$ dovrà essere $u(x) = 1$ per le osservazioni (a) e (d). Dunque in effetti la soluzione è sempre una funzione simmetrica (pari).

Quindi tutte le soluzioni del problema di Cauchy (iii) si scrivono nella forma

$$u(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{\left(x_0^2 - x^2\right)^2}{4}} & \text{per } |x| < x_0 \\ 1 & \text{per } |x| \geq x_0 \end{cases}$$

al variare di $x_0 \in [0, 1]$. □